

Diffraction et formation des images : Fondamentaux

GEORGES BOUDEBS

Table des matières

I. Présentation	3
II. Cours	4
1. Analyse de Fourier à deux dimensions.....	4
1.1. Définitions.....	4
1.2. Théorèmes concernant la Transformée de Fourier.....	5
1.3. Fonctions séparables.....	6
1.4. Quelques fonctions fréquemment utilisées et leur Transformée de Fourier.....	8
2. Théorie scalaire de la diffraction.....	10
2.1. Le principe d'Huygens-Fresnel.....	11
2.2. Le Spectre angulaire des ondes planes.....	12
2.3. L'équation d'Helmholtz.....	12
2.4. Propagation du spectre angulaire.....	13
2.5. Le phénomène de propagation considéré comme un filtre spatial linéaire.....	14
2.6. Effets d'une ouverture diffractante sur le spectre angulaire d'une perturbation.....	14
3. Diffraction de Fraunhofer.....	15
3.1. Approximations du principe d'Huygens-Fresnel.....	16
3.2. Les approximations de Fresnel.....	16
3.3. Les approximations de Fraunhofer.....	17
4. Propriétés des lentilles relatives à la transformation de Fourier.....	17
4.1. La lentille mince considérée comme un transformateur de phase.....	18
4.2. Propriétés des lentilles relatives à la transformation de Fourier.....	20
4.3. Formation des images en éclairage monochromatiques.....	25
5. Étude générale des systèmes formant des images.....	27
5.1. Le schéma général.....	27
5.2. Cas de l'éclairage cohérent.....	28
5.3. Cas de l'éclairage incohérent.....	29
III. Etude de cas	32
1. Diffraction de Fraunhofer d'un réseau d'amplitude sinusoïdal.....	32
IV. Exercice	35
1. Test de connaissances.....	35
Solution des exercices	36
Bibliographie	43
Crédit des ressources	44

I.Présentation

Module :

Interférences et Diffraction

Auteur(s) :

Georges BOUDEBS - Université d'Angers - Laboratoire de Photonique d'Angers (LPHIA | UPRES EA 4464)

Résumé :

Après un bref rappel sur le formalisme de Fourier à deux dimensions, nous aborderons la théorie de la diffraction et les limitations qu'elle impose. Nous effectuerons ensuite des approximations qui permettront de ramener les calculs à des opérations mathématiques simples. Le calcul explicite sera mené en détail pour démontrer l'une des propriétés les plus remarquables et les plus utiles d'une lentille convergente à savoir son aptitude à réaliser une TF bidimensionnelle. Enfin, l'étude générale des systèmes formant des images sera abordée en introduisant la notion de fonction de transfert optique dans le cas de l'éclairage spatialement cohérent et incohérent.

Mots-clés :

Transformation de Fourier, Diffraction de Fraunhofer, Fonction de transfert optique, Système imageur

Pré-requis :

Analyse de Fourier - Théorie des systèmes linéaires

Objectif(s) pédagogique(s) :

De la même façon qu'il est plus judicieux de décrire la réponse d'un ampli audio en terme de fréquences (temporelles), l'objectif pédagogique de ce cours consiste à amener le lecteur à raisonner en terme de fréquences spatiales lorsqu'il se trouve face à un système imageur. Par ailleurs, ce cours constitue un préalable fondamental nécessaire pour la compréhension du cours 2 de ce module à savoir le filtrage optique.

Plan du cours :

- Introduction
- Analyse de Fourier à deux dimensions
- Théorie scalaire de la diffraction
- Diffraction de Fraunhofer
- Propriétés des lentilles relatives à la transformation de Fourier
- Étude générale des systèmes formant des images

Conception & production :

PRN - Le Mans Université

Licence :

Licence GNU¹

1 - <http://www.gnu.org/licenses/fdl.txt>

II. Cours

Les systèmes de télécommunications comme les systèmes optiques destinés à la formation des images sont conçus pour collecter, traiter et véhiculer l'information. Pour les premiers, l'information est généralement sous forme temporelle (par exemple une tension modulée), alors que pour les seconds elle est sous forme spatiale (une amplitude ou un profil spatial d'intensité). D'un point de vue fondamental, cette différence est plutôt minime.

Un point commun entre les deux disciplines réside dans les mathématiques nécessaires pour les décrire : la théorie des systèmes et l'analyse de Fourier. La raison fondamentale de cette similitude n'est pas simplement le mot « information » mais plutôt certaines propriétés telles que la *linéarité* et l'*invariance*. Tout système ou dispositif (électronique, optique, ou autre) qui possède ces deux propriétés peut être décrit mathématiquement avec une facilité déconcertante en utilisant les techniques de *l'analyse de fréquence*. De même qu'il est commode de décrire un amplificateur en termes de réponse en fréquence temporelle, il est aussi souvent commode de décrire un système de formation d'images en termes de sa réponse en fréquence spatiale.

Il est particulièrement important de voir que la similitude des mathématiques peut être exploitée non seulement pour l'analyse des phénomènes en jeu mais également pour la synthèse de nouvelles fonctions. De la même façon qu'un spectre d'une fonction temporelle peut être intentionnellement manipulé en utilisant le filtrage électrique, le spectre d'une fonction spatiale peut être modifié de diverses manières. L'exemple du microscope à contraste de phase de Zernike (prix Nobel) en est la meilleure preuve.

1. Analyse de Fourier à deux dimensions

L'analyse de Fourier à deux dimensions est un outil mathématique extrêmement utile pour l'étude des phénomènes linéaires et non linéaires. Pour l'étude détaillée des concepts mathématiques, le lecteur pourra consulter par exemple les références [[The Fourier integral and its application]] et/ou [[The Fourier transform and its application]]. P.M. Duffieux, un scientifique français, a été le premier à utiliser les méthodes de Fourier dans l'analyse des systèmes optiques [[L'intégrale de Fourier et ses applications à l'optique]].

1.1. Définitions

a) La transformée de Fourier

La **transformée de Fourier** (ou spectre de Fourier, ou spectre des fréquences) d'une fonction complexe g de 2 variables indépendantes x et y que nous noterons \tilde{G} ou $TF(g)$ est définie par :

$$\tilde{G}(u, v) = TF(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

\tilde{G} est une fonction à valeurs complexes de 2 variables indépendantes u et v . Ces variables sont considérées comme des fréquences spatiales.

De façon analogue, la TF inverse d'une fonction $\tilde{G}(u, v)$ que nous noterons $TF^{-1}(\tilde{G})$ est définie par :

$$TF^{-1}(\tilde{G}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

La TF et la TF^{-1} ne diffèrent que par le signe de l'exposant.

Définition

Le spectre de Fourier \tilde{G} d'une fonction g est donc simplement l'ensemble des facteurs de pondération que l'on doit appliquer à chacune des fonctions élémentaires $e^{+j2\pi(ux+vy)}$ pour restituer la fonction g .

Nous reviendrons sur la signification physique de cette fonction élémentaire un peu plus loin dans ce document.

b) La distribution de Dirac

La distribution de Dirac $\delta(x,y)$ est définie par son effet à l'intérieur d'une intégrale. Au sens mathématique nous avons l'identité :

$$\iint f(x,y)\delta(x,y)dxdy = f(0,0)$$

Une représentation simple de cette « fonction » consiste à la considérer définie en $x = 0, y = 0$ ayant une valeur infinie en ce point et nulle ailleurs de façon à ce que $\int \int \delta(x,y)dxdy = 1$.

1.2. Théorèmes concernant la Transformée de Fourier

a) Introduction

Les théorèmes ci-dessous seront utilisés fréquemment car ils peuvent éviter un travail considérable dans la recherche des solutions des problèmes d'analyse de Fourier. Soit :

$$TF[g(x,y)] = \tilde{G}(u,v) \text{ et } TF[h(x,y)] = \tilde{H}(u,v)$$

b) Théorème de linéarité

La transformée d'une somme de 2 fonctions est la somme de leurs transformées respectives :

$$TF(\alpha g + \beta h) = \alpha TF(g) + \beta TF(h)$$

c) Théorème de similitude

Une dilatation des coordonnées dans le domaine spatial (x,y) se traduit par une contraction des fréquences u et v et par un changement d'amplitude du spectre tout entier :

$$TF[g(ax, by)] = \frac{1}{|ab|} \tilde{G}\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

d) Transposition, conjugaison et dérivation

La transposée de $g(x,y)$ est $g(-x,-y)$:

$$TF[g(-x,-y)] = \tilde{G}(-u,-v).$$

Conjugaison : $TF(g(x,y)^*) = \tilde{G}^*(-u,-v)$.

Dérivation : $TF\left\{\frac{\partial^n}{\partial x^n}[g(x,y)]\right\} = (j2\pi u)^n \tilde{G}(u,v)$ pour $n \geq 1$.

e) Théorème de translation

$$TF\{g(x-a, y-b)\} = \tilde{G}(u,v)e^{-j2\pi(ua+vb)}$$

Une translation dans le domaine spatial introduit une variation de phase linéaire dans le domaine des fréquences.

f) Théorème de Parseval

Ce théorème exprime la conservation de l'énergie.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{G}(u, v)|^2 du dv$$

g) Théorème relatif à la convolution

La convolution de 2 fonctions dans le domaine spatial est équivalente à l'opération simple que constitue la multiplication de leurs transformées respectives

$$TF \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \right\} = TF(g * h) = \tilde{G}(u, v) \cdot \tilde{H}(u, v)$$

h) Théorème relatif à l'autocorrélation

C'est un cas particulier du précédent

$$TF \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha, \beta) g^*(\alpha - x, \beta - y) d\alpha d\beta \right\} = |\tilde{G}(u, v)|^2$$

i) Théorème de réciprocity

La succession de la TF et de la TF^{-1} d'une fonction restitue cette fonction sauf aux points de discontinuités :

$$TF \left\{ TF^{-1}[g(x, y)] \right\} = TF^{-1} \left\{ TF[g(x, y)] \right\} = g(x, y)$$

1.3. Fonctions séparables

a) Introduction

Une fonction de 2 variables indépendantes est dite séparable si on peut l'écrire sous forme d'un produit de 2 fonctions chacune d'entre elles dépendant d'une seule variable.

Exemples :

$$g(x, y) = g_x(x)g_y(y)$$

en coordonnées polaires

$$g(r, \theta) = g_r(r)g_\theta(\theta)$$

Ces fonctions sont plus simples à traiter car la TF bidimensionnelle se réduit au produit de 2 TF unidimensionnelles :

$$\begin{aligned} TF(g(x, y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(u x + v y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_x(x) e^{-j2\pi(ux)} dx \int_{-\infty}^{\infty} g_y(y) e^{-j2\pi(vy)} dy \\ &= TF_x(g_x) \cdot TF_y(g_y) \end{aligned}$$

b) Fonctions à symétrie circulaire

Ces fonctions jouent un rôle important en optique qui possède pour la plupart ce type de symétrie. On dit que la fonction g est à symétrie circulaire si on peut l'écrire comme une fonction de la seule variable r en coordonnées polaires :

$$g(r, \theta) = g(r)$$

D'après la définition de la TF :

$$\tilde{G}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(u x + v y)} dx dy$$

Pour exploiter la propriété de la symétrie circulaire de g on passe en coordonnées polaires planes dans les plans (x, y) et (u, v) :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{u^2 + v^2} \\ \phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} u = \rho \cos(\phi) \\ v = \rho \sin(\phi) \end{array} \right.$$

Dans le cas général, on a :

$$TF(g) = \tilde{G}(u, v) = \tilde{G}_0(\rho, \varphi)$$

En coordonnées polaires, on écrit :

$$u x + v y = r\rho (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) = r\rho \cos(\theta - \varphi)$$

$$dxdy = dS = r dr d\theta$$

donc

$$\tilde{G}_0(\rho, \varphi) = \int \int g_r(r) e^{-j2\pi r\rho \cos(\theta - \varphi)} r dr d\theta$$

Pour couvrir tout le plan (x, y) de $-\infty$ à $+\infty$ les bornes de la double intégrale deviennent $0 \leq r \leq \infty$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Donc

$$\tilde{G}_0(\rho, \varphi) = \int_0^{\infty} r g_r(r) \left\{ \int_0^{2\pi} e^{-j2\pi r\rho \cos(\theta - \varphi)} d\theta \right\} dr$$

On définit la fonction de Bessel de « 1ère espèce » d'ordre 0, $J_0(a)$ en fonction de la variable a sans dimension, par l'intégrale suivante :

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ja \cos(\theta)} d\theta$$

On peut toujours choisir l'origine des angles dans le plan (u, v) de façon à prendre $\cos(\theta - \varphi) = \cos(\theta)$, ainsi (I-1) devient :

$$\tilde{G}_0(\rho, \varphi) = 2\pi \int_0^{\infty} r g_r(r) J_0(2\pi r\rho) dr = \tilde{G}_0(\rho)$$

En intégrant cette dernière sur r , on remarque que \tilde{G}_0 ne dépend que de ρ .

Cette forme particulière de la TF revient assez fréquemment en optique. On l'appelle **transformation de Fourier-Bessel** ou bien **transformation de Hankel d'ordre 0**.

Une démonstration identique montre que la TF inverse d'une fonction à symétrie circulaire \tilde{G}_0 peut s'exprimer par

$$g_r(r) = 2\pi \int_0^{\infty} \rho \tilde{G}_0(\rho) J_0(2\pi r\rho) d\rho$$

Ainsi il n'y a pas de différence entre les transformations directes et inverses (pour les fonctions à symétrie circulaire). On utilise la notation $B\{ \}$ pour représenter la transformation de Fourier-Bessel.

Remarque

$B\{ \}$ n'est rien d'autre qu'un cas particulier de la TF bidimensionnelle. Donc toute propriété classique de la TF trouve son analogue parmi les propriétés de $B\{ \}$. En particulier :

$$B\{g_r(ar)\} = \frac{1}{a^2} \tilde{G}_0\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

1.4. Quelques fonctions fréquemment utilisées et leur Transformée de Fourier

a) Définition

Rectangle	$\text{rect}(x) =$	$1 ; \text{si } x < 1/2$ $0 ; \text{ailleurs}$
Sinus cardinal	$\text{sinc}(x) =$	$\sin(\pi x)/(\pi x)$
Triangle	$\text{tri}(x) =$	$1- x ; \text{si } x \leq 1$ 0 ailleurs
Cercle	$\text{circ}(r) =$	$1 ; \text{si } r \leq 1$ $0 ; \text{ailleurs}$

b) Représentation graphique

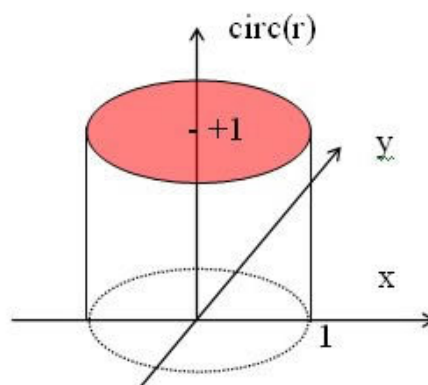
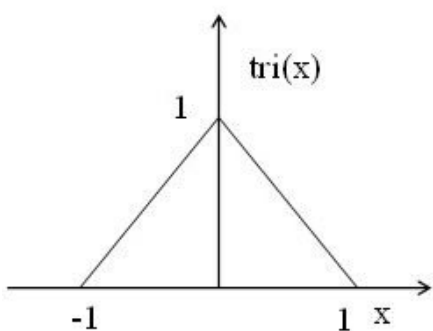
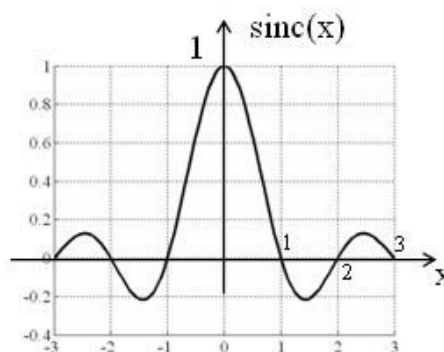
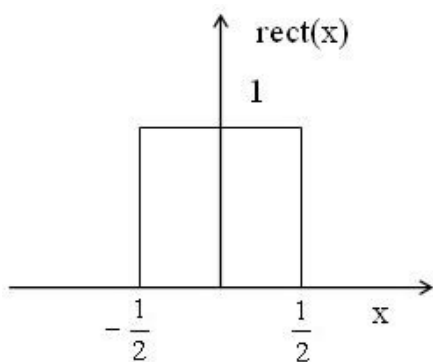


Image I-1 - Représentations graphiques de quelques fonctions utilisées

c) Couples de transformées relatifs à quelques fonctions séparables en coordonnées cartésiennes

Fonction	TF
$\exp[-\pi(a^2x^2 + b^2y^2)]$	$\frac{1}{ ab } \exp\left[-\pi\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right)\right]$
$\text{rect}(ax)\text{rect}(by)$	$\frac{1}{ ab } \text{sinc}(u/a)\text{sinc}(v/b)$
$\text{tri}(ax)\cdot\text{tri}(by)$	$\frac{1}{ ab } \text{sinc}^2(u/a)\cdot\text{sinc}^2(v/b)$
$\delta(ax, by)$	$\frac{1}{ ab }$
$\exp[j\pi(ax + by)]$	$\delta\left[u - \frac{a}{2}, v - \frac{b}{2}\right]$

d) La fonction cercle et sa Transformée de Fourier

$$\text{circ}(r) = 1 ; \text{ si } r \leq 1$$

$$= 0 ; \text{ ailleurs}$$

La relation (I-2) pour les fonctions à symétrie circulaire (au paragraphe 'fonctions à symétrie circulaire') s'applique ici avec :

$$g_r(r) = 1 \text{ pour } 0 \leq r \leq 1$$

En remplaçant (I-3) dans (I-2) il vient :

$$\tilde{G}_0(\rho) = TF[\text{circ}(r)] = 2\pi \int_0^1 r J_0(2\pi r \rho) dr$$

Posons $r' = 2\pi r \rho$, les bornes de l'intégrale dans la relation (I-4) deviennent 0 et $2\pi\rho$.
donc

$$\tilde{G}_0(\rho) = TF[\text{circ}(r)] = \frac{1}{2\pi\rho^2} \int_0^{2\pi\rho} r' J_0(r') dr'$$

Compte tenu de l'identité :

$$\int_0^x \alpha J_0(\alpha) d\alpha = x J_1(x)$$

où $J_1(x)$ est définie comme la fonction de Bessel d'ordre 1, on trouve finalement que :

$$TF[\text{circ}(r)] = J_1(2\pi\rho)/\rho$$

L'allure de cette fonction est donnée dans la figure I-2 qui suit.

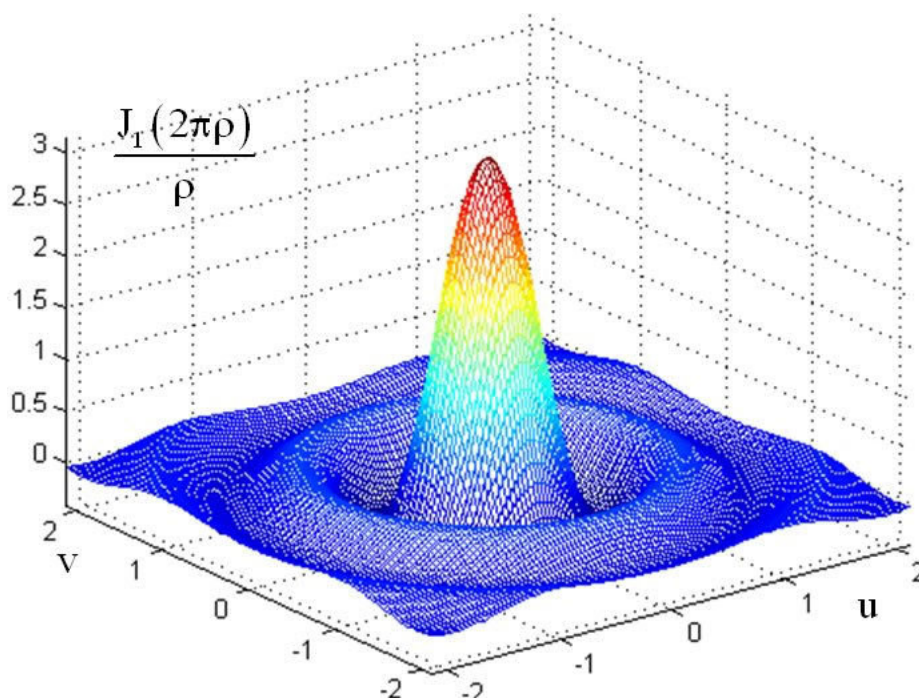


Image I-2 - Transformée de Fourier de la fonction cercle

Notons que la *TF* de la fonction cercle est à symétrie circulaire. Elle se compose d'un pic central et d'une série d'anneaux concentriques d'amplitudes décroissantes.

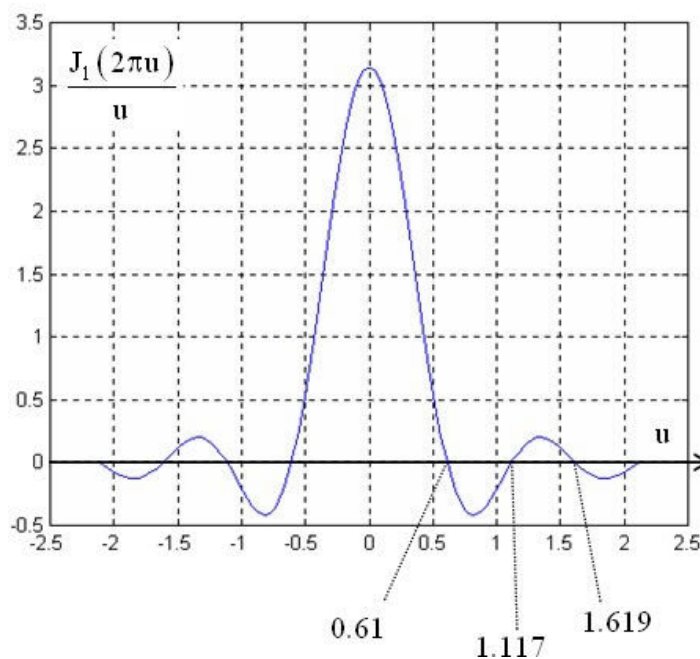


Image I-3 - Profil radial de la fonction figurant dans la figure I-2.

La figure I-3 représente un profil radial de cette fonction. Les zéros ne sont pas également espacés le long d'un rayon comme c'est le cas pour la fonction sinus cardinal. On peut noter aussi que le rayon du lobe central est égal à 0,61.

2. Théorie scalaire de la diffraction

Pour comprendre pleinement les propriétés physiques des systèmes optiques formant des images et celles des systèmes de traitement optique de l'information, il est essentiel de tenir compte de la diffraction et des limitations qu'elle impose

2.1. Le principe d'Huygens-Fresnel

Soit Σ une surface diffractante (voir figure II-1). Le principe d'Huygens Fresnel peut être exprimé par :

$$U(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{jk r_{01}}}{r_{01}} \cos \theta \, dS$$

où $\vec{r}_{01} = \vec{P_0 P_1}$, \vec{n} est un vecteur unitaire \perp à Σ , $\theta = (\vec{n}, \vec{r}_{01})$, $k = 2\pi/\lambda$, dS surface élémentaire entourant $P_1 \in \Sigma$, $U(P_1)$ et $U(P_0)$ amplitudes des champs en P_1 et P_0 .

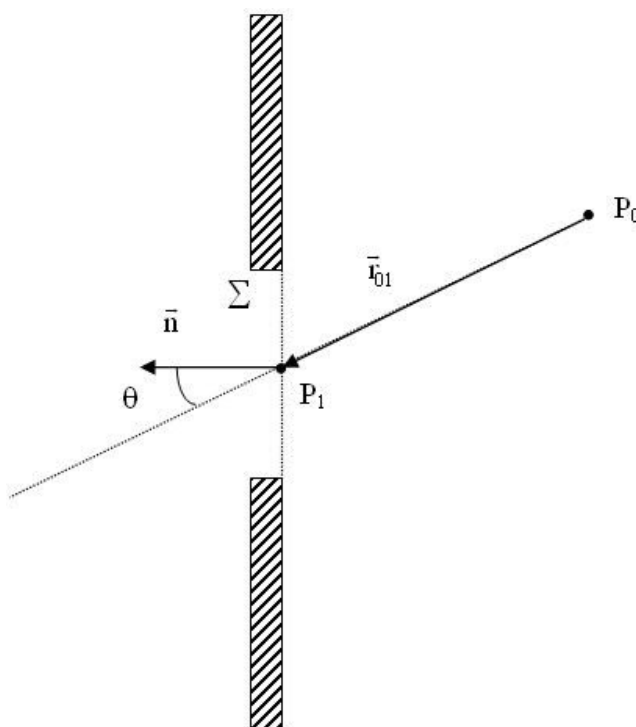


Image II-1 - Ouverture diffractante.

Signification physique de l'Eq. II-1 :

L'amplitude du champ au point P_0 après l'ouverture est exprimé comme étant la superposition d'ondes sphériques divergentes $e^{jk r_{01}}/r_{01}$ émises par toutes les sources secondaires P_1 qui constituent l'ouverture diffractante Σ .

La source secondaire située en P_1 a les propriétés suivantes :

- elle a une amplitude complexe proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente $U(P_1)$.
- elle est pondérée par un $\cos \theta$ exprimant la directivité par rapport au point d'observation et pondérée par dS exprimant la surface élémentaire effective qui participe à l'émission

Remarque

Il est important de remarquer ici que ce principe n'est rien d'autre en réalité qu'une intégrale de superposition exprimant la linéarité du système. C'est une infinité de sources secondaires sur Σ qui interfèrent en P_0 .

On peut écrire :

$$U(P_0) = \iint_{\Sigma} h(P_0, P_1) U(P_1) dS$$

où h est une fonction de pondération définie par :

$$h(P_0, P_1) = \frac{1}{j\lambda} \frac{e^{jkr_{01}}}{r_{01}} \cos \theta$$

2.2. Le Spectre angulaire des ondes planes

Soit une onde monochromatique se propageant dans la direction des $z > 0$ et arrivant sur le plan xOy . Soit $U(x, y, 0)$ l'amplitude complexe du champ dans ce plan. On se propose de calculer le champ résultant $U(x, y, z)$ qui apparaît en un point P_0 de coordonnées (x, y, z) .

Dans le plan xOy la fonction U possède une TF :

$$\tilde{A}_0(u, v) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) e^{-j2\pi(u x + v y)} dx dy$$

On peut considérer U comme la TF inverse de son spectre :

$$U(x, y, 0) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}_0(u, v) e^{j2\pi(u x + v y)} du dv$$

L'équation d'une onde plane, d'amplitude unité, qui se propage suivant le vecteur unitaire \vec{u} dans une direction définie par ses cosinus directeurs (α, β, γ) s'écrit :

$$B(x, y, z) = e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}} \text{ avec } \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} \text{ et } \vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$B(x, y, z) = e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \gamma z)} \text{ avec } \gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$$

Dans l'expression (II-4) la fonction $\exp[j2\pi(\alpha x + \beta y)]$ peut être considérée comme l'expression, dans le plan $z = 0$, d'une onde plane qui se propage dans la direction des cosinus directeurs :

$$\alpha = \lambda u ; \beta = \lambda v ; \gamma = \sqrt{1 - (\lambda u)^2 - (\lambda v)^2}$$

l'amplitude complexe de cette onde plane élémentaire est $\tilde{A}_0(u, v) du dv$.

C'est pour cette raison que la fonction $\tilde{A}_0(u, v)$ définie précédemment dans la relation (II-3) peut être écrite :

$$\tilde{A}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) e^{-\frac{j2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y)} dx dy$$

Elle est nommée spectre angulaire de la perturbation $U(x, y, 0)$.

2.3. L'équation d'Helmholtz

Une perturbation lumineuse au point P et à l'instant t est représentée par la fonction scalaire $u(P, t)$. Pour une onde monochromatique on peut écrire explicitement le champ sous la forme :

$$u(P, t) = A(P) \cos(2\pi\nu t + \phi(P))$$

$A(P)$ et $\phi(P)$ sont respectivement l'amplitude et la phase de l'onde en P ; ν est la fréquence temporelle. Dans la notation complexe adoptée :

$$u(P, t) = \operatorname{Re}\{U(P)e^{-j2\pi\nu t}\} \text{ où } U(P) = A(P)e^{-j\phi(P)}$$

$U(P)$ est l'amplitude complexe.

Si la perturbation réelle $u(P, t)$ représente une onde optique, elle doit satisfaire en tout point de l'espace où il n'y pas de source à l'équation d'onde scalaire :

$$\Delta \cdot u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Δ étant l'opérateur Laplacien : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ et c la vitesse de la lumière.

Comme la dépendance par rapport à t est connue a priori, la fonction complexe $U(P)$ suffit à décrire la perturbation. En remplaçant (II-7) dans (II-8), on voit que l'amplitude complexe doit obéir à l'équation suivante :

$$(\Delta + k^2) U = 0$$

L'équation (II-9) est connue sous le nom **d'équation d'Helmoltz**. A l'avenir nous supposons que l'amplitude complexe de toute onde optique monochromatique qui se propage dans un espace libre doit obéir à une telle relation

2.4. Propagation du spectre angulaire

Considérons le spectre angulaire de l'onde U situé à la distance z suivant l'axe de propagation (voir figure II-2) :

$$\tilde{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} U(x, y, z) e^{-\frac{j2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

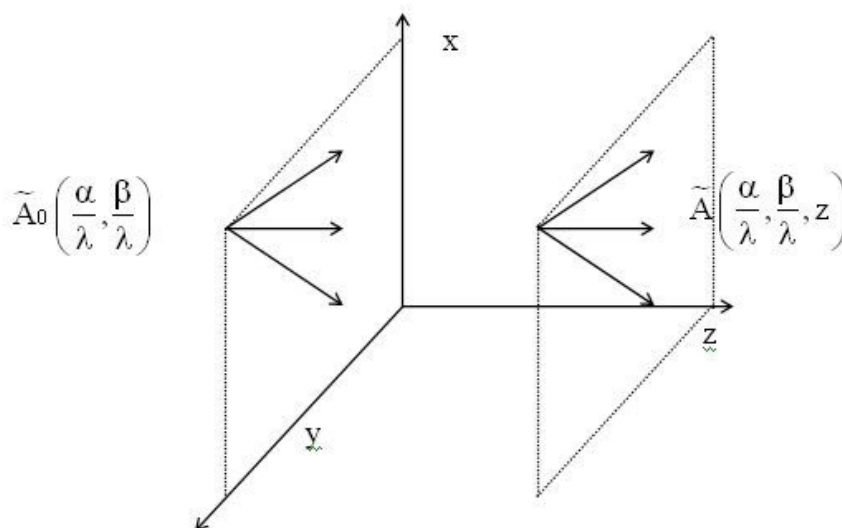


Image II-2- Propagation du spectre angulaire suivant z .

Pour trouver les effets de la propagation des ondes sur le spectre angulaire de la perturbation

il faut trouver une relation entre $\tilde{A}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$ et $\tilde{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right)$. On sait que $U(x, y, z)$ peut s'écrire sous la forme d'une TF^{-1} :

$$U(x, y, z) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \tilde{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) e^{+\frac{j2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)} d\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) d\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)$$

En outre U doit satisfaire l'équation d'Helmoltz en tout point où il n'y a pas de source. En remplaçant (II-10) dans (II-9) et après calcul, on s'aperçoit que $\tilde{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right)$ doit satisfaire l'équation différentielle suivante [[Aspects of diffraction theory and their application to the ionosphere]] :

$$\frac{d^2 \tilde{A}}{dz^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) \tilde{A} = 0$$

Une solution élémentaire de cette équation s'écrit sous la forme :

$$\tilde{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = \tilde{A}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z}$$

Remarque

- Ce résultat montre que lorsque les cosinus directeurs satisfont $\alpha^2 + \beta^2 < 1$, l'effet de la propagation sur une distance z se traduit simplement par un changement de phase relatif aux diverses composantes du spectre angulaire.
- Il arrive parfois (en présence d'un dioptre par exemple) que les cosinus directeurs vérifient $\alpha^2 + \beta^2 > 1$, dans ce cas la racine est imaginaire et la relation précédente peut s'écrire :

$$\tilde{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = \tilde{A}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) e^{-\mu z} \text{ avec } \mu = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}$$

Comme $\mu > 0$ les composantes spectrales sont atténuées par le phénomène de propagation. Des telles composantes spectrales sont appelées « ondes évanescentes ».

- le cas limite où $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ correspond à des ondes se propageant perpendiculairement à Oz . De ce fait elles ne véhiculent aucune puissance suivant z .

2.5. Le phénomène de propagation considéré comme un filtre spatial linéaire

On peut écrire l'expression (II-11) en fonction des fréquences spatiales u et v sous la forme :

$$\frac{\tilde{A}(u, v, z)}{\tilde{A}_0(u, v)} = \tilde{H}(u, v) = e^{j \frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{1 - (\lambda u)^2 - (\lambda v)^2}}$$

La fonction \tilde{H} appelée « **fonction de transfert** » caractérise le système dans le domaine des fréquences ; plus particulièrement, ici elle caractérise le phénomène de propagation.

Si la distance z est supérieure à quelques longueurs d'ondes, on peut négliger les ondes évanescentes (cas où la racine est imaginaire). La fonction de transfert se réduit à :

$$\tilde{H}(u, v) = \begin{cases} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{1 - (\lambda u)^2 - (\lambda v)^2}}, & \text{si } u^2 + v^2 < \frac{1}{\lambda^2} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Fondamental

Le phénomène de propagation peut être considéré comme un filtre passe bas. La transmittance de ce filtre est nulle à l'extérieur d'une région circulaire de rayon $\rho = \frac{1}{\lambda}$ dans le plan des fréquences. A l'intérieur de ce domaine circulaire le module de la fonction de transfert est égal à 1, mais il s'introduit une variation de phase qui dépend de (u, v) , de λ et de z .

2.6. Effets d'une ouverture diffractante sur le spectre angulaire d'une perturbation

On place une ouverture Σ dans le plan xOy à $z = 0$. On désigne par $U_i(x, y, 0)$ le champ incident juste avant Σ et $U_t(x, y, 0)$ le champ transmis juste après Σ (voir figure II-3).

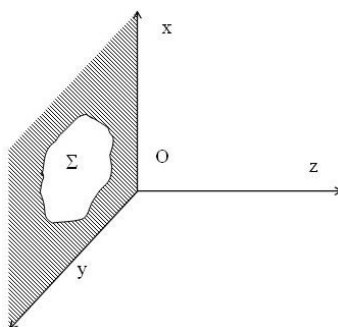


Image II-3 - Ouverture diffractante dans le plan xOy

On définit la transmittance $t(x, y)$ de l'ouverture Σ comme le rapport des amplitudes complexes immédiatement après et avant Σ .

$$t(x, y) = \frac{U_t(x, y, 0)}{U_i(x, y, 0)}$$

Dans le cas de la figure II-3, Σ étant une ouverture :

$$t(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x, y) \in \Sigma \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

a) Cas général : onde incidente quelconque

D'après la définition de t nous avons : $U_t(x, y, 0) = U_i(x, y, 0)t(x, y)$, Le théorème de convolution implique

$$\tilde{A}_t\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \tilde{A}_i\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) * \tilde{T}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$$

avec

$$\tilde{T}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)} dx dy$$

b) Cas particulier : l'onde incidente est plane

Dans ce cas le résultat est plus simple :

$$U_i(x, y, 0) = 1 \Rightarrow \tilde{A}_i\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \delta\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$$

En appliquant (II-13) :

$$\tilde{A}_t\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \tilde{T}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$$

Ainsi on trouve directement le spectre angulaire de l'onde transmise en calculant la TF de la transmittance de l'ouverture.

Fondamental

L'introduction d'une ouverture diffractante qui limite spatialement une onde incidente a pour effet d'élargir le spectre angulaire de cette perturbation. En effet plus l'ouverture est petite plus sa TF est large et plus le spectre angulaire de l'onde transmise est étalé. Un effet analogue se manifeste dans le domaine temporel :

$\Delta\nu\Delta t \approx 1$. Plus la durée de l'impulsion est courte plus son spectre de fréquence est large .

3. Diffraction de Fraunhofer

Au chapitre précédent nous avons présenté les résultats de la théorie scalaire de la diffraction sous sa forme la plus générale. Ici nous allons effectuer des approximations qui permettront de ramener les calculs à des opérations mathématiques simples.

3.1. Approximations du principe d'Huygens-Fresnel

Puisque $U(x_1, y_1) = 0$ en dehors de Σ (voir figure III-1) on peut écrire l'intégrale définie dans l'Eq. II-2A en intégrant de $-\infty$ à $+\infty$:

$$U(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int h(x_0, y_0, x_1, y_1) U(x_1, y_1) dx_1 dy_1$$

Approximations générales

- distance $z \gg$ la plus grande dimension linéaire de Σ .
- distance $z \gg$ la plus grande dimension linéaire de la région d'observation.

Avec ces deux hypothèses nous avons :

$$\begin{cases} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \approx 1 \\ h(x_0, y_0, x_1, y_1) = \frac{1}{j\lambda} \frac{e^{jk r_{01}}}{z} \end{cases}$$

Le r_{01} dans l'exposant ne peut être remplacé par z comme pour le dénominateur car l'erreur qui en résulterait serait multipliée par $k \approx 2 \times 3.14 / (0.5 \times 10^{-6}) = 1.2 \times 10^7$ ce qui pourrait entraîner des erreurs sur la phase bien plus grandes que 2π radians.

3.2. Les approximations de Fresnel

$$r_{01} = z \sqrt{1 + \frac{(x_0 - x_1)^2}{z^2} + \frac{(y_0 - y_1)^2}{z^2}}$$

Fresnel suppose que les 2 premiers termes du développement de la racine suffisent à représenter correctement la phase si z est suffisamment grand.

$$r_{01} \approx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - x_1}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_0 - y_1}{z} \right)^2 \right\}$$

La fonction de pondération s'écrit :

$$h(x_0, y_0, x_1, y_1) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left\{ j \frac{k}{2z} [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2] \right\}$$

ce qui signifie qu'au delà d'une certaine distance z , le changement de phase maximal dû au 1er terme négligé doit être $\ll 1 \text{ rad}$:

$$kz \left(\frac{\epsilon_{max}}{8} \right) \ll 1$$

Cette condition sera réalisée si :

$$z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda} [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2]_{Max}^2$$

L'intégrale de superposition (III-1) devient :

$$U(x_0, y_0) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{j\frac{k}{2z}[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]} dx_1 dy_1$$

En développant les termes quadratiques dans l'exposant :

$$U(x_0, y_0) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}[x_0^2+y_0^2]} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{j\frac{k}{2z}[x_1^2+y_1^2]} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}[x_0x_1+y_0y_1]} dx_1 dy_1$$

Ainsi mis à part les facteurs multiplicatifs de phase et d'amplitude qui sont indépendants de x_1 et y_1 , on peut calculer l'amplitude de l'onde diffractée en effectuant la :

$$TF \left\{ U(x_1, y_1) \exp \left\{ j\frac{k}{2} z [x_1^2 + y_1^2] \right\} \right\}$$

Cette TF devant être évaluée aux fréquences

$$u = \frac{x_0}{\lambda z}; v = \frac{y_0}{\lambda z}$$

3.3. Les approximations de Fraunhofer

Fraunhofer suppose que la fonction de phase quadratique :

$$e^{j\frac{k}{2z}[x_1^2+y_1^2]} \approx 1 \text{ si } z \gg \frac{k(x_1^2 + y_1^2)_{Max}}{2}$$

C'est une condition encore plus restrictive que les conditions de Fresnel :

$$\text{Soit } (x_1^2 + y_1^2)_{Max} = 1 \text{ mm}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ et } \lambda = 0.5 \mu\text{m} \Rightarrow z \gg 6 \text{ m.}$$

Alors que, avec les mêmes paramètres il faut que $z \gg 1 \text{ cm}$ pour être dans les conditions de Fresnel. C'est pour cette raison que la diffraction de Fraunhofer est appelé aussi diffraction à l'infini.

Dans ces conditions l'expression (III-2) s'écrit :

$$U(x_0, y_0) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}[x_0x_1+y_0y_1]} dx_1 dy_1$$

Mis à part les facteurs multiplicatifs qui précèdent l'intégrale, on constate que cette expression est tout simplement la TF de la distribution du champ sur l'ouverture évaluée aux fréquences $u = x_0 / \lambda z$; $v = y_0 / \lambda z$.

Remarque

Les figures de diffraction de Fraunhofer peuvent être observées à des distances plus faibles que celle qui a été calculé précédemment si une lentille convergente est convenablement placée entre l'ouverture et le plan d'observation. C'est justement ce que l'on va aborder dans la partie suivante intitulée: Propriétés des lentilles relatives à la transformation de Fourier.

4. Propriétés des lentilles relatives à la transformation de Fourier

L'une des propriétés les plus remarquables et les plus utiles d'une lentille convergente est son aptitude naturelle à réaliser une TF bidimensionnelle avec une extrême simplicité alors que

l'opération analogique de la TF en électronique fait appel à des analyseurs de fréquences, encombrants, et coûteux.

4.1. La lentille mince considérée comme un transformateur de phase

Définition

Une lentille est dite mince si un rayon entrant par une face au point (x, y) émerge de la face opposée au point (x, y) (translation négligeable du rayon)

Ainsi une lentille mince retarde simplement la phase de l'onde incidente d'une quantité proportionnelle à l'épaisseur de la lentille en tout point (x, y) (voir figure IV-1).

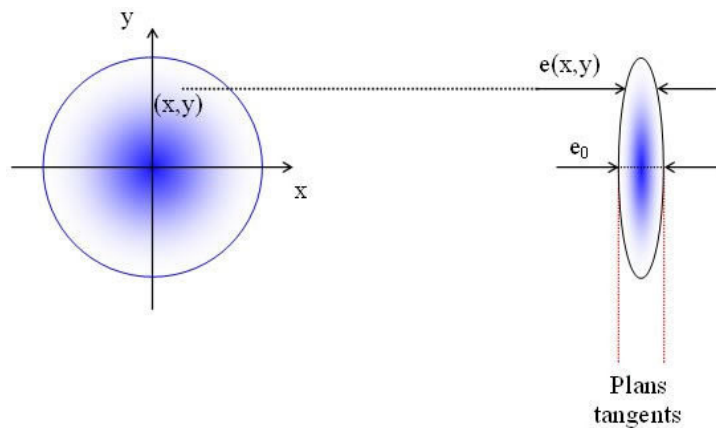


Image IV-1 Lentille mince : vue de face et de profil

Soit e_0 l'épaisseur maximale de la lentille. Notons $\varphi_L = k n e(x, y)$ le retard de phase introduit par la lentille et $\varphi_A = k e_0 - k e(x, y)$ le retard de phase introduit par la région restante de l'espace libre entre les plans tangents à l'entrée et à la sortie de la lentille.

Le retard total de phase subi par l'onde s'écrit donc :

$$\varphi(x, y) = \varphi_L + \varphi_A = k(n-1)e(x, y) + k e_0$$

Soient $U_L(x, y)$ et $U'_L(x, y)$ les champs complexes situés immédiatement devant et derrière la lentille.

Ceci revient à représenter l'effet produit par une lentille à l'aide d'une transformation de phase de la forme $U'_L(x, y) = U_L(x, y)t_L(x, y)$ avec :

$$t_L(x, y) = \exp(jk e_0) \cdot \exp[jk(n-1) \cdot e(x, y)]$$

Un calcul mathématique relativement simple montre que la fonction épaisseur peut s'écrire (en considérant l'approximation paraxiale) [[Introduction to Fourier Optics]] :

$$e(x, y) = e_0 - \frac{(x^2 + y^2)}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbures des faces d'entrée et de sortie de la lentille. En remplaçant Eq. (IV-2) dans (IV-1) on obtient :

$$t_L(x, y) = \exp(jk e_0) \cdot \exp \left[-jk(n-1) \cdot \frac{(x^2 + y^2)}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]$$

En négligeant le terme de phase constant et en regroupant les grandeurs caractéristiques d'une lentille (n, R_1, R_2) en un seul nombre f , appelé distance focale, tel que :

$$\frac{1}{f} \equiv (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

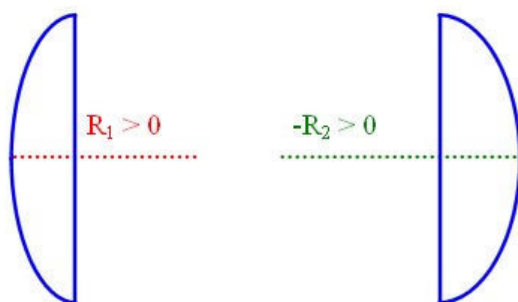
la transformation de phase s'écrit :

$$t_L(x, y) = e^{-\frac{jk}{2f}(x^2+y^2)}$$

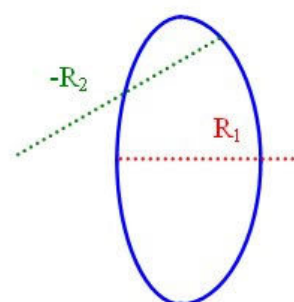
Cette relation néglige la dimension finie de la lentille. On en tiendra compte plus tard.

Convention de signe : $R > 0$ pour un centre de courbure à droite de la surface et $R < 0$ dans le cas contraire. Cette convention de signe adoptée pour R , donc pour f , permet d'appliquer t_L à tous les types de lentilles convergentes (voir figure IV-2) et divergentes (voir figure IV-3) :

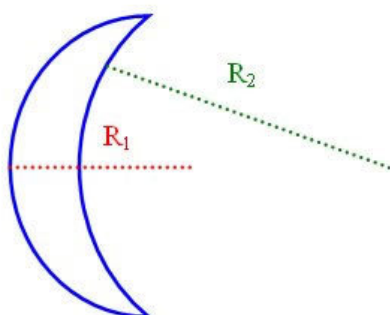
Plan convexe



Biconvexe



Ménisque convergent



$$\begin{aligned} R_2 > R_1 &\Rightarrow \\ \frac{1}{R_1} > \frac{1}{R_2} &\Rightarrow \\ f > 0 & \end{aligned}$$

Image IV-2- Divers type de lentilles convergentes

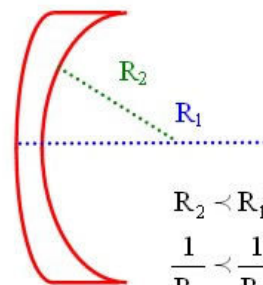
Biconcave



Plan concave



Ménisque divergent



$$\begin{aligned} R_2 < R_1 &\Rightarrow \\ \frac{1}{R_1} < \frac{1}{R_2} &\Rightarrow \\ f < 0 & \end{aligned}$$

Image IV-3- Divers type de lentilles divergentes

4.2. Propriétés des lentilles relatives à la transformation de Fourier

a) Introduction

Dans ce qui suit on supposera que l'éclairage est monochromatique et on s'intéresse à la distribution d'amplitude de la lumière dans le plan focal image de la lentille. Trois cas seront envisagés selon la position de l'objet par rapport à la lentille.

b) Objet placé contre la lentille

Soit un objet plan de transmittance en amplitude $t_o(x, y)$ placé immédiatement en avant d'une lentille convergente (voir figure IV-4).

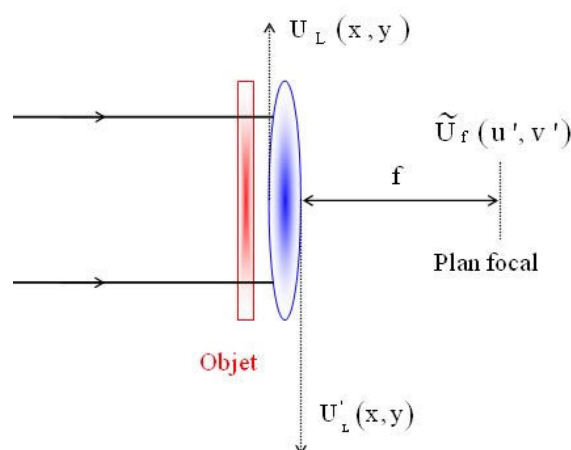


Image IV-4- Objet placé contre la lentille

On suppose que l'objet est uniformément éclairé par une onde plane d'amplitude A tombant sous l'incidence normale. Dans le plan tangent à l'entrée de la lentille on peut écrire :

$$U_L(x, y) = A \cdot t_o(x, y)$$

La distribution du champ immédiatement à l'arrière de la lentille devient alors :

$$U'_L(x, y) = U_L(x, y) \cdot e^{-\frac{jk}{2f}(x^2+y^2)} \cdot P(x, y)$$

Où pour tenir compte de la dimension finie de la lentille, on définit la fonction pupillaire :

$$P(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{à l'intérieur de l'ouverture de la lentille} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Afin de déterminer la distribution du champ dans le plan focal, appliquons la formule de diffraction de Fresnel pour $z=f$ (Eq. III-2) :

$$\tilde{U}_f(u', v') = \frac{e^{jkf}}{j\lambda f} e^{j\frac{k}{2f}[u'^2+v'^2]} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U'_L(x, y) e^{j\frac{k}{2f}[x^2+y^2]} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f}[xu'+yv']} dx dy$$

En laissant de côté le facteur de phase constant $\exp(jkf)$ et en remplaçant $U'_L(x, y)$ par sa valeur, on constate que les facteurs quadratiques de phase à l'intérieur de l'intégrale se compensent :

$$\tilde{U}_f(u', v') = \frac{e^{j\frac{k}{2f}[u'^2+v'^2]}}{j\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_L(x, y) P(x, y) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f}[xu'+yv']} dx dy$$

Si les dimensions spatiales de l'objet sont inférieures à l'ouverture de la lentille (voir figure IV-5), le facteur $P(x,y)$ n'intervient plus car le champ à l'endroit où l'objet est opaque est nul et $U_L(x,y)P(x,y) = U_L(x,y)$:

$$U_f(u', v') = \frac{e^{j\frac{k}{2f}[u'^2+v'^2]}}{j\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} \int U_L(x,y) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f}[xu'+yv']} dx dy$$

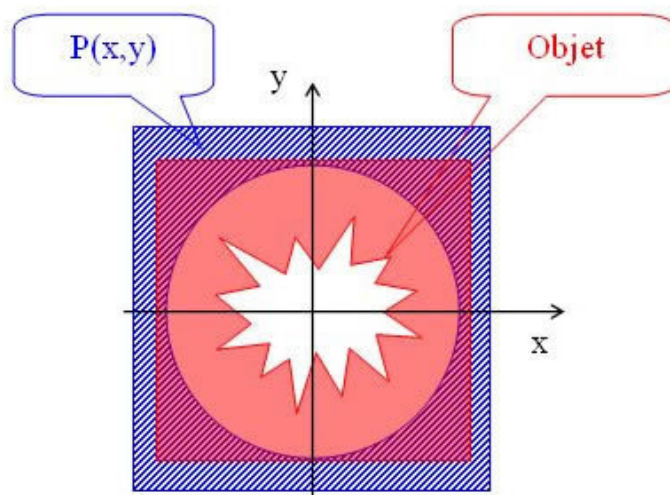


Image IV-5- Objet placé contre la lentille

Remarque

- On voit que l'amplitude complexe dans le plan focal est la figure de diffraction de Fraunhofer du champ incident devant la lentille bien que la distance d'observation soit égale à la distance f qui peut être très inférieure aux distances usuelles d'observation définies dans le chapitre 3.
- Mis à part les facteurs multiplicatifs devant l'intégrale, l'expression précédente (IV-3)

$$TF[U_L(x,y)] \left(u' = \frac{u'}{\lambda f}, v' = \frac{v'}{\lambda f} \right)$$

est donc simplement une transformation de Fourier :

- Le terme de phase quadratique devant la TF exprime ce que l'on appelle une «**courbure de phase**».
- Généralement, on s'intéresse à I_f la distribution de l'intensité, appelé «**spectre angulaire de puissance**» ou «**énergie spectrale**» de l'objet :

$$I_f(u', v') = \left(\frac{A}{\lambda f} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int t_o(x,y) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f}[xu'+yv']} dx dy \right|^2$$

c) Objet placé avant la lentille

Considérons l'objet (caractérisé par sa transmittance en amplitude $t_o(x,y)$) situé à la distance d devant la lentille (voir la figure IV-6).

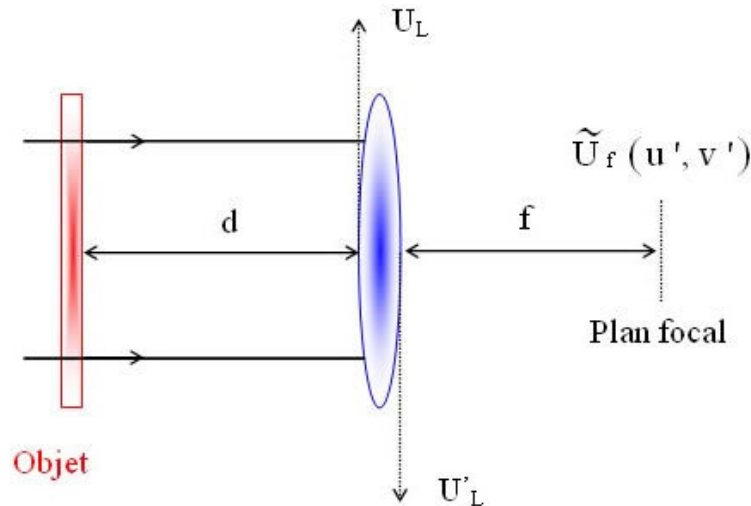


Image IV-6- Objet placé à une distance d devant la lentille

C'est un montage plus général que le précédent (défini pour $d = 0$). On suppose que l'objet est uniformément éclairé par une onde plane d'amplitude A tombant sous l'incidence normale.

Soit $\tilde{F}_o(u, v) = TF\{A \cdot t_0(x, y)\}$ et $\tilde{F}_L(u, v) = TF\{U_L(x, y)\}$. On sait que la fonction de transfert du phénomène de propagation permet de calculer \tilde{F}_L à partir de \tilde{F}_o (Eq. II-12 partie : Théorie scalaire de la diffraction) :

$$\tilde{F}_L(u, v, d) = \tilde{F}_o(u, v) \cdot e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sqrt{1-(\lambda u)^2-(\lambda v)^2}}$$

La lentille sera considérée dans l'approximation paraxiale donc les rayons sont très peu inclinés par rapport à l'axe optique : $\alpha^2 = (\lambda u)^2 \ll 1$

et $\beta^2 = (\lambda v)^2 \ll 1$ Un développement limité de la racine dans l'expression précédente implique

$$\tilde{F}_L(u, v, d) = \tilde{F}_o(u, v) \cdot e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d} \cdot e^{-j\pi\lambda d(u^2+v^2)}$$

$e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d}$ est un terme de phase constant que l'on peut omettre dans ce qui suit. Par ailleurs, on connaît la propagation de $U_L(x, y)$ qui est contre la lentille jusqu'au plan focal. Elle est décrite dans le paragraphe précédent (Eq. IV-3):

$$\tilde{U}_f(u', v') = \frac{e^{j\frac{k}{2f}[u'^2+v'^2]}}{j\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_L(x, y) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f}[xu'+yv']} dx dy = \frac{e^{j\frac{k}{2f}[u'^2+v'^2]}}{j\lambda f} \tilde{F}_L\left(\frac{u'}{\lambda f}, \frac{v'}{\lambda f}\right)$$

Or en appliquant la fonction de transfert de propagation (Eq. IV-4), il vient :

$$\tilde{F}_L\left(\frac{u'}{\lambda f}, \frac{v'}{\lambda f}\right) = \tilde{F}_o\left(\frac{u'}{\lambda f}, \frac{v'}{\lambda f}\right) \cdot e^{-j\pi\lambda d\left[\left(\frac{u'}{\lambda f}\right)^2 + \left(\frac{v'}{\lambda f}\right)^2\right]}$$

dans l'argument de l'exponentielle on met en facteur $1/(\lambda f)^2$ et après avoir simplifié par λ , on multiplie par $2/2$ pour faire apparaître $k = 2\pi/\lambda$:

$$\tilde{F}_L\left(\frac{u'}{\lambda f}, \frac{v'}{\lambda f}\right) = \tilde{F}_o\left(\frac{u'}{\lambda f}, \frac{v'}{\lambda f}\right) \cdot e^{\frac{-jkd}{2f^2}(u'^2+v'^2)}$$

Donc l'expression (IV-5) devient :

$$\tilde{U}_f(u', v') = \frac{e^{j\frac{k}{2f}[u'^2+v'^2]}}{j\lambda f} \cdot \tilde{F}_o\left(\frac{u'}{\lambda f}, \frac{v'}{\lambda f}\right) \cdot e^{-\frac{jkd}{2f^2}(u'^2+v'^2)}$$

En regroupant les exponentielles et en mettant en facteur $e^{j\frac{k}{2f}[u'^2+v'^2]}$ on trouve :

$$\tilde{U}_f(u', v') = \frac{1}{j\lambda f} \cdot \tilde{F}_o\left(\frac{u'}{\lambda f}, \frac{v'}{\lambda f}\right) \cdot e^{j\frac{k}{2f}(u'^2+v'^2)\left(1-\frac{d}{f}\right)}$$

ou encore :

$$\tilde{U}_f(u', v') = \frac{e^{j\frac{k}{2f}(u'^2+v'^2)\left(1-\frac{d}{f}\right)}}{j\lambda f} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_o(x, y) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f}[xu'+yv']} dx dy$$

Remarque

Remarquons qu'un facteur de phase précède la TF de l'objet. Ce facteur s'annule pour $d = f$ (si l'objet est placé dans le plan focal objet de la lentille). Dans ce cas la courbure quadratique de phase disparaît pour donner lieu à une transformation de Fourier exacte.

d) Objet placé après la lentille

On considère les mêmes conditions d'éclairage que précédemment : onde plane monochromatique d'amplitude A et à incidence normale. L'objet reçoit une onde sphérique qui converge vers le foyer image de la lentille (voir figure IV-7).

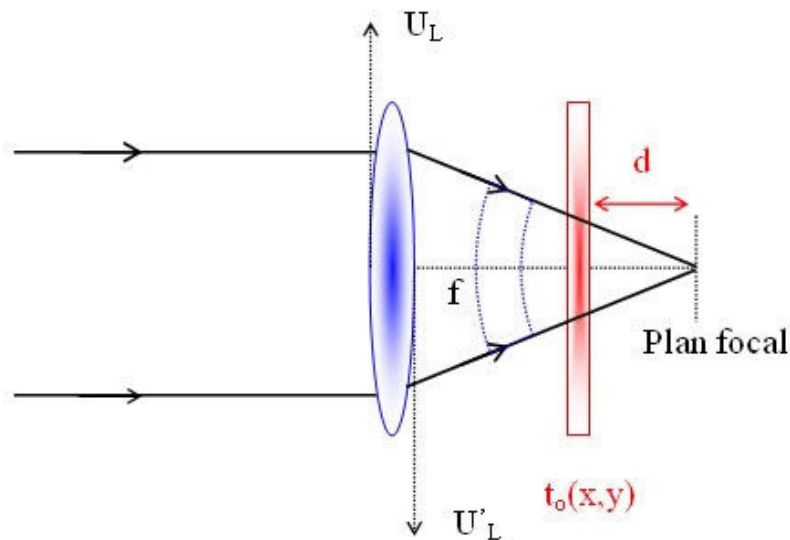


Image IV-7- Objet placé derrière la lentille à une distance d du plan focal

En se basant sur la figure IV-8,

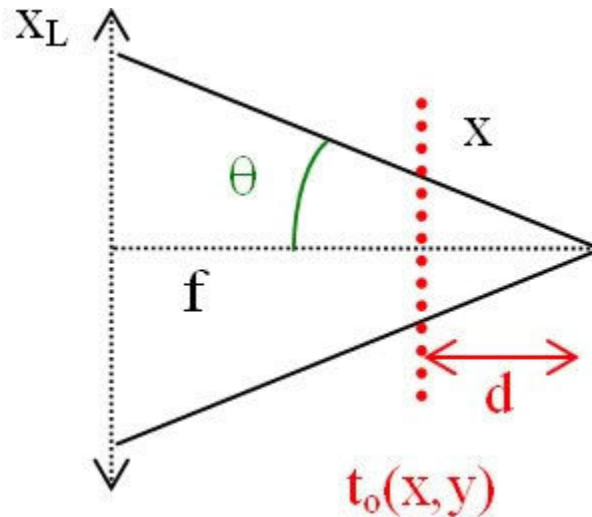


Image IV-8- Schéma simplifié de la figure IV-7. Définition des variables intervenant dans le calcul.

Un calcul simple dans le cadre de l'optique géométrique avec l'approximation paraxiale montre que :

- l'amplitude au niveau de l'objet est $A' \approx \frac{Af}{d}$.
- l'étendue finie de la zone éclairée, intersection du plan objet et du cône de lumière peut être représentée par la fonction pupillaire effective : $P(x_L, y_L) = P(xf/d, yf/d)$.
- l'onde sphérique qui éclaire l'objet peut être écrite :

$$\exp(-jkr) \approx \exp(-jkd) \cdot \exp[-jk(x^2 + y^2)/2d]$$

Dans ces conditions, l'amplitude complexe $U_o(x, y)$ du champ transmis par l'objet s'écrit :

$$U_o(x, y) = \left\{ \frac{Af}{d} P\left(\frac{xf}{d}, \frac{yf}{d}\right) \cdot e^{-j\frac{k}{2d}(x^2+y^2)} \right\} \cdot t_o(x, y)$$

En appliquant la diffraction de Fresnel (Eq. III-2) pour passer du plan objet au plan focal ($z = d$), l'amplitude dans ce dernier plan s'écrit :

$$\tilde{U}_f(u', v') = \frac{e^{jkd}}{j\lambda d} e^{j\frac{k}{2d}[u'^2+v'^2]} \int_{-\infty}^{\infty} \int U_o(x, y) e^{j\frac{k}{2d}[x^2+y^2]} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{\lambda d}[xu'+yv']} dx dy$$

En remplaçant $U_o(x, y)$ (Eq. IV-7) par sa valeur, on s'aperçoit que le terme de phase quadratique à l'intérieur de l'intégrale s'annule.

$$\tilde{U}_f(u', v') = \frac{A}{j\lambda d} e^{j\frac{k}{2d}[u'^2+v'^2]} \cdot \frac{f}{d} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int t_o(x, y) P\left(\frac{xf}{d}, \frac{yf}{d}\right) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{\lambda d}[xu'+yv']} dx dy$$

Mis à part le terme de phase quadratique, la distribution de l'amplitude dans le plan focal est donc la TF de la portion de l'objet limitée par la projection de l'ouverture de la lentille dans le plan de cet objet. Ce résultat est le même que celui déjà obtenu quand l'objet est placé tout contre la lentille. Cependant, ici, l'expérimentateur peut modifier l'échelle de la TF .

En augmentant d , on augmente les dimensions de la TF jusqu'à ce que l'objet vienne contre la lentille ($d = f$)^u $= \frac{u'}{\lambda d} \Rightarrow u' = \lambda du$. Cette propriété peut être utile dans les applications sur le filtrage spatial.

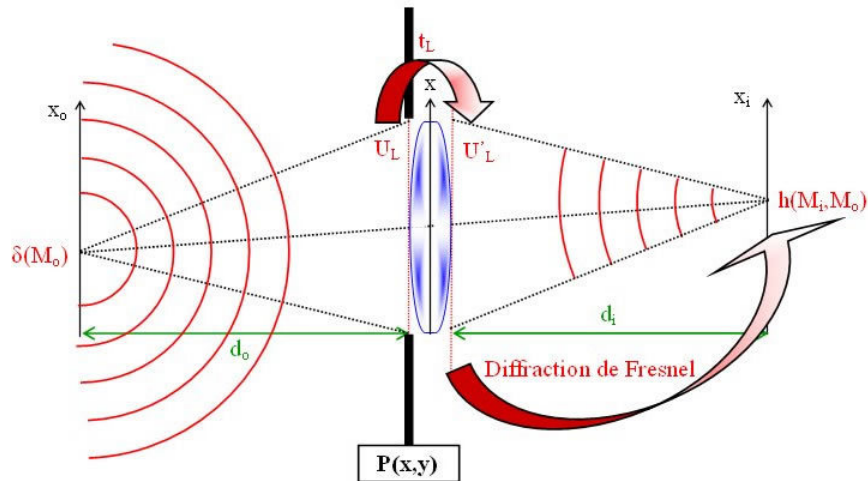


Image IV-10- Détermination de la réponse impulsionnelle d'un système imageur

Il émet une ondelette sphérique qui se propage sur une distance d_o jusqu'au plan tangent à la lentille. L'amplitude du champ est alors :

$$U_L(x, y) \approx \exp\{+jk[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2]/2d_o\}/d_o$$

Ce champ rencontre la fonction pupillaire $P(x, y)$ représentant les dimensions finies de la lentille. Ensuite on applique la transformation de phase

$$t_L(x, y) = \exp[-jk(x^2 + y^2)/2f]$$

à ce champ pour obtenir U'_L . La diffraction de Fresnel sur une distance finie égale à d_i donne l'expression de la réponse impulsionnelle :

$$h(M_i, M_o) = \frac{1}{\lambda^2 d_o d_i} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{\lambda d_i} [x(x_i + G_s x_o) + y(y_i + G_s y_o)]} dx dy$$

$h(M_i, M_o)$ représente la figure de diffraction de Fraunhofer de l'ouverture de la lentille (la pupille) centrée au point $x_i = -G_s x_o$; $y_i = -G_s y_o$.

a) Relation entre l'objet et l'image

On pose $u = \frac{x}{\lambda d_i}$; $v = \frac{y}{\lambda d_i}$ et $x'_o = -G_s x_o$; $y'_o = -G_s y_o$. L'expression (IV-9) devient :

$$h(M_i, M'_o) = G_s \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i u, \lambda d_i v) \cdot e^{-j2\pi[u(x_i - x'_o) + v(y_i - y'_o)]} du dv$$

On voit de cette façon que la réponse impulsionnelle est spatialement invariante puisque $h(x_i, y_i ; x'_o, y'_o) \equiv h(x_i - x'_o, y_i - y'_o)$

En posant $h' = \frac{1}{G_s} h$, l'intégrale de superposition (IV-8) devient :

$$U_i(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h'(x_i - x'_o, y_i - y'_o) \cdot \left[\frac{1}{G_s} \cdot U_o\left(-\frac{x_o}{G_s}, -\frac{y_o}{G_s}\right) \right] dx'_o dy'_o$$

L'image apparaît comme la convolution de la réponse impulsionnelle avec l'image au sens de l'optique géométrique.

Fondamental

$$U_i(x_i, y_i) = h'(x_i, y_i) \otimes U_g(x_i, y_i)$$

$$U_g(x_i, y_i) = \frac{1}{G_s} \cdot U_o\left(-\frac{x_i}{G_s}, -\frac{y_i}{G_s}\right)$$

$$h'(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i u, \lambda d_i v) \cdot e^{-j2\pi[x_i u + y_i v]} du dv$$

Ce résultat traduit le fait que lorsqu'on tient compte des effets de la diffraction, l'image n'est plus la réplique exacte de l'objet. C'est une version atténuée par la convolution qui affecte les détails fins dans l'objet.

5. Étude générale des systèmes formant des images

5.1. Le schéma général

Soit un système optique composé de plusieurs lentilles (convergentes et divergentes). On adopte le système de « boîte noire » munis de ces éléments terminaux : pupille d'entrée (ouverture finie) et pupille de sortie (voir figure V-1).

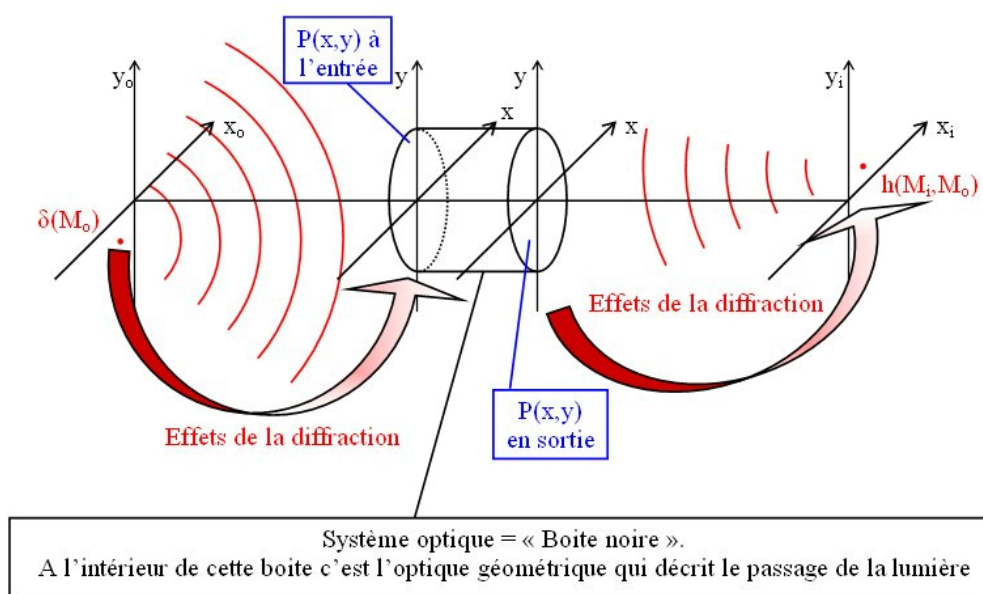


Image V-1- Schéma général d'un système formant des images

Le passage de la lumière entre les plans d'entrée et de sortie est décrit par l'optique géométrique. Ces pupilles sont déterminées en formant les images géométriques du plus petit diaphragme du système respectivement à travers les éléments qui précèdent ce diaphragme et ceux qui le suivent. Les deux points de vue qui consistent à considérer que la résolution de l'image est limitée soit par l'étendue finie de la pupille d'entrée, soit par l'étendue finie de la pupille de sortie sont absolument équivalents. La raison se trouve dans le fait qu'une pupille est tout simplement l'image géométrique de l'autre pupille (vu la définition de ces pupilles)

Abbe en 1873 considère qu'une partie seulement des composantes spectrales d'un objet passe à l'intérieur de la pupille d'entrée à cause de l'étendue finie de celle-ci. Les composantes arrêtées par la pupille sont précisément les composantes de haute fréquence de l'objet (voir figure V-2).

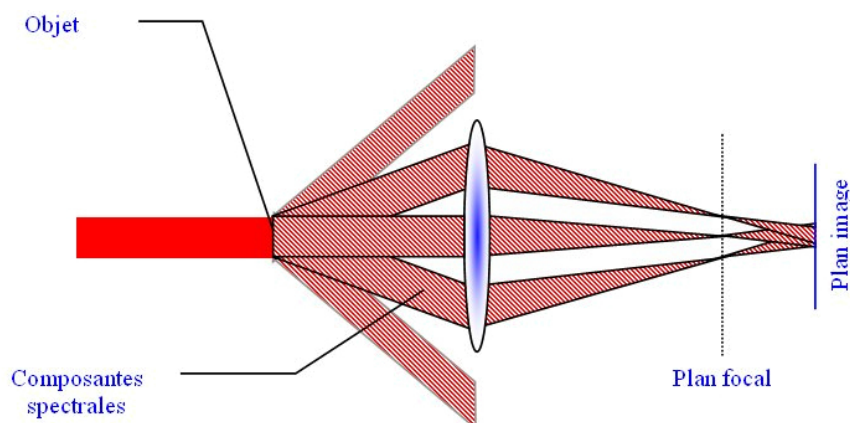


Image V-2 - Système imageur selon Abbe

5.2. Cas de l'éclairage cohérent

La fonction de transfert

On sait que (Eq. IV-10), $U_i(x_i, y_i) = h'(x_i, y_i) \otimes U_g(x_i, y_i)$ c'est à dire :

$$U_i(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h'(x_i - x'_o, y_i - y'_o) \cdot U_g(x'_o, y'_o) \cdot dx'_o dy'_o$$

Soient

- $\tilde{G}_g(u, v) = TF[U_g(x'_o, y'_o)]$ le spectre de la fonction à l'entrée ;
- $\tilde{G}_i(u, v) = TF[U_i(x_i, y_i)]$ le spectre de la fonction à la sortie ;
- $\tilde{H}(u, v) = TF[h'(x_i, y_i)]$ le spectre de la réponse impulsionnelle.

En appliquant le théorème de convolution :

$$\tilde{G}_i(u, v) = \tilde{H}(u, v) \cdot \tilde{G}_g(u, v)$$

Par la suite la fonction \tilde{H} sera appelée fonction de transfert cohérente.

Remarque

Remarquons que :

$$\tilde{H} = TF[h'] = TF\left(TF(P(\lambda d_i u, \lambda d_i v))\right)$$

donc $\tilde{H}(u, v) = P(-\lambda d_i u, -\lambda d_i v)$

- La fonction pupillaire P ne prend que la valeur 0 ou 1, il en est de même de la fonction de transfert cohérente.
- Il existe une bande passante de largeur finie dans le domaine des fréquences à l'intérieur de laquelle le système limité par la diffraction laisse passer sans distorsion d'amplitude ou de phase toutes les composantes fréquentielles. En dehors de cette bande passante la réponse en fréquence tombe brutalement à 0.
- En prenant un système de coordonnées tel que : $x_i = -x_i$; $y_i = -y_i$, on peut écrire :

$$H(u, v) = P(\lambda d_i u, \lambda d_i v)$$

5.3. Cas de l'éclairage incohérent

a) Introduction

Dans le cas de l'éclairage (spatialement) cohérent (voir figure V-3) tous les points de l'objet ont une amplitude complexe dont la phase varie dans le temps de la même façon.

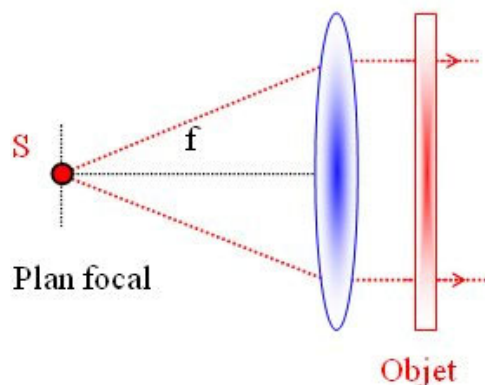


Image V-3- Schéma général d'un éclairage cohérent.

Expérimentalement ceci est réalisé en plaçant une source suffisamment petite dans le plan focal objet d'une lentille.

L'éclairage est dit (spatialement) incohérent si la source est relativement large (voir figure V-4).

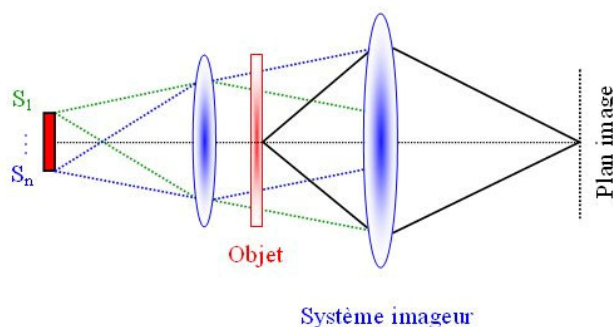


Image V-4- Schéma général d'un éclairage incohérent.

Les amplitudes complexes des différents points composants la source varient de façon aléatoire. Entre un train d'onde issu de S_1 et un autre issu de S_n la relation de phase disparaît et la moyenne temporelle sur le terme d'interférence sera nulle.

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_n \rangle + \langle 2 \sqrt{I_1 I_n} \cos(\phi_1(t) - \phi_2(t)) \rangle$$

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_n \rangle$$

Ce sont donc les intensités que l'on doit sommer.

On écrit l'image dans ce cas comme une transformation linéaire de l'intensité [[Introduction to Fourier Optics]] :

$$I_i(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h'(x_i - x'_o, y_i - y'_o)|^2 \cdot I_g(x'_o, y'_o) \cdot dx'_o dy'_o$$

L'intensité dans l'image est une convolution de l'intensité idéale (obtenue par l'optique géométrique) et d'une réponse impulsionnelle proportionnelle au carré du module de la réponse impulsionnelle obtenue avec un éclairage cohérent.

b) Réponse fréquentielle d'un système optique (éclairage incohérent)

Définissons les spectres normalisés de I_g et I_i :

$$\tilde{G}_g(u, v) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_g(x'_o, y'_o) \cdot e^{-j2\pi(u x'_o + v y'_o)} dx'_o dy'_o}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_g(x'_o, y'_o) \cdot dx'_o dy'_o}$$

$$\tilde{G}_i(u, v) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_i(x_i, y_i) \cdot e^{-j2\pi(u x_i + v y_i)} dx_i dy_i}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_i(x_i, y_i) \cdot dx_i dy_i}$$

Les spectres sont normalisés par rapport à la valeur de l'intégrale aux fréquences nulles qui représente la composante continue ou le fond continu de l'image.

D'une façon analogue on définit la fonction de transfert normalisée du système :

$$\tilde{H}_i(u, v) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h'(x_i, y_i)|^2 \cdot e^{-j2\pi(u x_i + v y_i)} dx_i dy_i}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h'(x_i, y_i)|^2 \cdot dx_i dy_i}$$

En appliquant le théorème de convolution à l'Eq. V-2, il vient :

$$\tilde{G}_i(u, v) = \tilde{H}_i(u, v) \cdot \tilde{G}_g(u, v)$$

\tilde{H}_i est appelée la «**fonction de transfert optique**» ou encore la «**fonction de transfert de modulation**» («FTM»).

c) Relation entre la FTM et la fonction de transfert cohérente

$$\tilde{H}(u, v) = TF(h') \text{ et } \tilde{H}_i(u, v) = \frac{TF(|h'|^2)}{TF(|h'|^2)_{(u=0; v=0)}}$$

En appliquant le théorème d'autocorrélation :

$$\tilde{H}_i(u, v) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}(u', v') \tilde{H}^*(u' - u, v' - v) \cdot du' dv'}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{H}(u', v')|^2 \cdot du' dv'}$$

En faisant le changement de variable $u'' = u' - u/2$ et $v'' = v' - v/2$, on peut rendre l'expression précédente symétrique :

$$\tilde{H}_i(u, v) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}(u'' + \frac{u}{2}, v'' + \frac{v}{2}) \tilde{H}^*(u'' - \frac{u}{2}, v'' - \frac{v}{2}) \cdot du'' dv''}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{H}(u'', v'')|^2 \cdot du'' dv''}$$

Or pour le système cohérent nous avons $\tilde{H}(u, v) = P(\lambda d_i u, \lambda d_i v)$, donc

$$\tilde{H}_i(u, v) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(u' + \frac{\lambda d_i u}{2}, v' + \frac{\lambda d_i v}{2}) P^*(u' - \frac{\lambda d_i u}{2}, v' - \frac{\lambda d_i v}{2}) \cdot du' dv'}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(u', v') \cdot du' dv'}$$

Où on a remplacé u'' par u' et remplacé P^2 par P au dénominateur car $P = 1$ ou 0 . La relation (V-3) servira de lien fondamental entre les systèmes cohérents et incohérents.

L'expression de \tilde{H}_i fait apparaître l'aire de la partie commune à deux fonctions pupillaires identiques :

- l'une centrée au point de coordonnées : $(\frac{\lambda d_i u}{2}, \frac{\lambda d_i v}{2})$,
- l'autre au point diamétralement opposé de coordonnées $(-\frac{\lambda d_i u}{2}, -\frac{\lambda d_i v}{2})$.

Le dénominateur normalise cette aire par l'aire totale de la pupille (voir figure V-5).

$$\tilde{H}_i(u,v) = \frac{\text{Aire de la partie commune}}{\text{Aire totale}}$$

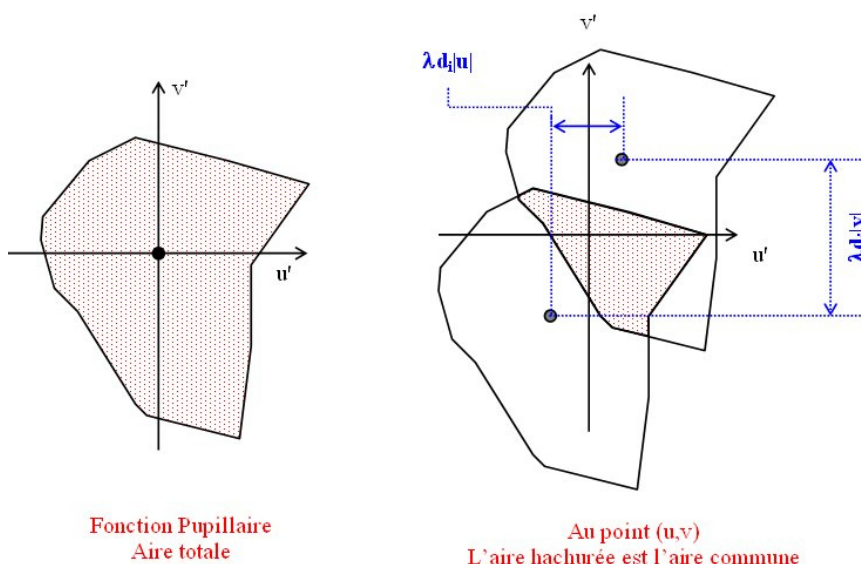


Image V-5 - Fonction pupillaire et calcul de la FTM dans le cas d'un éclairage incohérent.

Pour plus de détails concernant ce sujet, le lecteur pourra consulter la référence [[Introduction to Fourier Optics]] et les références à l'intérieur.

Fondamental

Résumé

Le système en éclairage cohérent est linéaire en amplitude. L'intensité est donnée par $I_i = |h * U_g|^2$.

Le système en éclairage incohérent est linéaire en intensité. L'intensité est donnée par $I_i = |h|^2 * |U_g|^2$.

Le spectre fréquentiel de l'intensité image s'écrit :

- **en cohérent :** $TF(I_i) = (\tilde{H} \cdot \tilde{G}_g) \otimes (\tilde{H} \cdot \tilde{G}_g)$.
- **en incohérent :** $TF(I_i) = (\tilde{H} \otimes \tilde{H}) \cdot (\tilde{G}_g \otimes \tilde{G}_g)$.

\tilde{G}_g est le spectre de U_g , \tilde{H} est la fonction de transfert cohérente.

* désigne la convolution : $g * h = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u,v)h(x-u,y-v)dudv$

⊗ désigne l'auto-corrélation : $F(u,v) \otimes F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u',v')F^*(u'-u,v'-v) \cdot du'dv'$

III. Etude de cas

1. Diffraction de Fraunhofer d'un réseau d'amplitude sinusoïdal

Jusqu'à présent la transmittance $t(x, y)$ de l'ouverture était définie de façon binaire ('0' à l'extérieur, '1' à l'intérieur). On peut introduire des distributions spatiales absorbantes (par exemple à l'aide d'un négatif photo) et obtenir ainsi toutes les valeurs de t comprises entre '0' et '1'.

Considérons un réseau d'amplitude sinusoïdal limité par une ouverture carré de côté L :

$$t(x_1, y_1) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x_1) \right] \text{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{y_1}{L}\right)$$

où f_0 est la fréquence spatiale du réseau et m représente la variation crête à crête de l'amplitude. m est appelé profondeur de modulation de l'amplitude (voir figure EC1(a)).

Dans la figure EC1(b) on peut voir l'image de ce réseau. Évidemment le pas de ce réseau est agrandi volontairement dans cette figure pour visualiser la transmittance sinusoïdale.

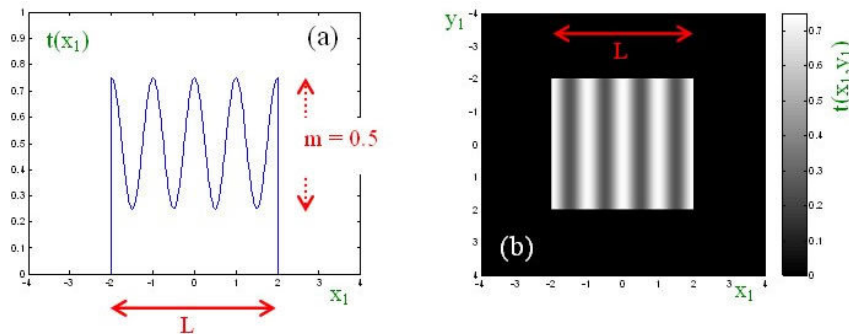


Image EC1 - (a) Evolution de la fonction transmittance d'un réseau sinusoïdal en amplitude ; (b) image de ce réseau limité par une ouverture carré.

Si l'écran est éclairé sous incidence normale par une onde plane monochromatique d'amplitude unité, la distribution du champ dans l'ouverture est tout simplement égale à $t(x_1, y_1)$.

La figure de diffraction de Fraunhofer passe par le calcul de la $TF(t)$:

$$TF[t(x_1, y_1)] = TF\left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x_1)\right] * TF\left[\text{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{y_1}{L}\right)\right]$$

Soient :

$$\tilde{A} = TF\left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x_1)\right] = \frac{1}{2} \delta(u, v) + \frac{m}{4} \delta(u + f_0, v) + \frac{m}{4} \delta(u - f_0, v)$$

$$\tilde{B} = TF\left[\text{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{y_1}{L}\right)\right] = L^2 \text{sinc}(Lu) \text{sinc}(Lv)$$

Par suite de la distributivité du produit de convolution :

$$\tilde{A} * \tilde{B} = \frac{L^2}{2} \text{sinc}(Lu) \text{sinc}(Lv) * \delta(u, v) + m \frac{L^2}{4} \text{sinc}(Lu) \text{sinc}(Lv) * \delta(u + f_0, v) +$$

$$m \frac{L^2}{4} \text{sinc}(Lu) \text{sinc}(Lv) * \delta(u - f_0, v)$$

Or pour traduire une fonction $f(x, y)$ il suffit de faire sa convolution avec la traduite de la distribution de Dirac ($\delta(x - a)$) :

$$f(x, y) * \delta(x - a, y) = \int \int f(u, v) \delta(x - a - u, y - v) du dv = f(x - a, y)$$

Donc

$$TF[t(x_1, y_1)] = \frac{L^2}{2} \text{sinc}(Lv) \left\{ \text{sinc}(Lu) + \frac{m}{2} \text{sinc}[L(u + f_0)] + \frac{m}{2} \text{sinc}[L(v - f_0)] \right\}$$

D'où la distribution du champ en amplitude :

$$U(x_0, y_0) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x_0^2 + y_0^2)} \cdot TF[t(x_1, y_1)] \begin{cases} u = \frac{x_0}{\lambda z} \\ v = \frac{y_0}{\lambda z} \end{cases}$$

Dans la figure EC2(a) sont représentées les 3 fonctions sinus cardinal centrées sur $-f_0$, 0 et $+f_0$ dans le cas où $m = 1$.

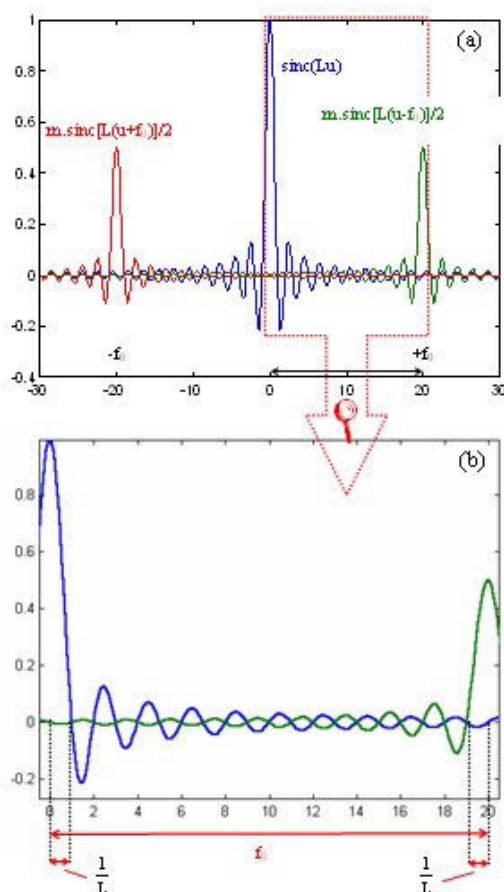


Image EC2 - (a) les 3 fonctions sinus cardinal apparaissant dans l'amplitude du champ diffracté ; (b) agrandissement de la figure précédente pour comparer f_0 à $2/L$.

Un agrandissement de cette figure est visible dans la figure EC2(b) où on peut voir la largeur du lobe central des deux fonctions sinc centrées en 0 et $+f_0$.

Si $f_0 \gg \frac{2}{L}$, le produit de ces deux fonctions peut être négligé car lorsque l'une est au maximum l'autre a des valeurs proches de zéros. On peut donc négliger le chevauchement entre les 3 fonctions sinc. Lorsqu'on calcule l'intensité, les produits croisés entre ces fonctions est négligeable devant le carré de chacune de ces fonctions.

En définitif, l'intensité dans le plan d'observation devient :

$$I(x_0, y_0) = \left(\frac{L^2}{2\lambda z} \right)^2 \text{sinc}^2\left(\frac{Ly_0}{\lambda z}\right) \times \left\{ \text{sinc}^2\left(\frac{Lx_0}{\lambda z}\right) + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left[\frac{L}{\lambda z}(x_0 + f_0\lambda z)\right] + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left[\frac{L}{\lambda z}(x_0 - f_0\lambda z)\right] \right\}$$

Dans la figure EC3(a) on peut voir l'image de la figure de diffraction obtenue à partir de l'équation précédente.

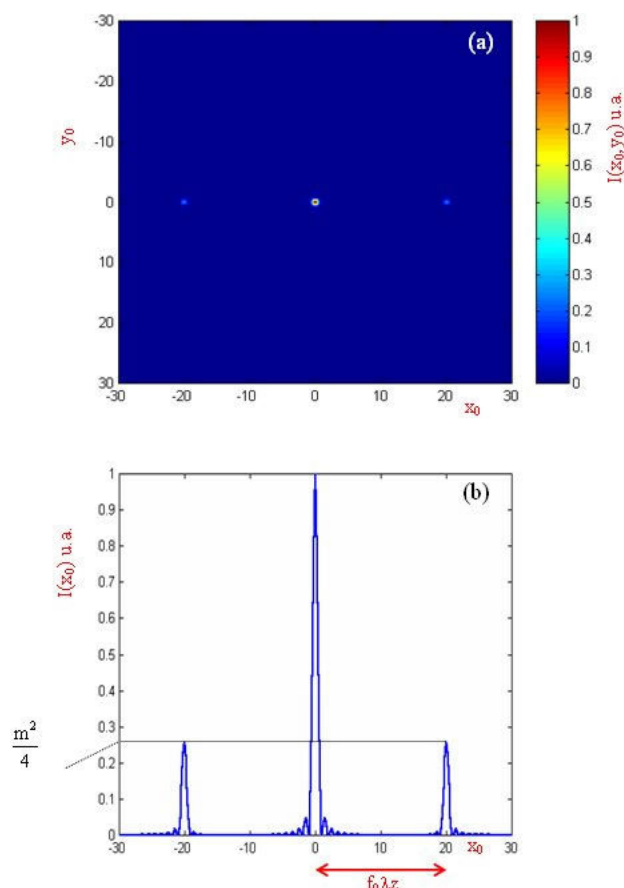


Image EC3 - (a) Image montrant la figure de diffraction de Fraunhofer du réseau ; (b) Evolution de la répartition de l'intensité normalisée (en $y_0 = 0$) lorsque $m = 1$.

Une partie de l'énergie lumineuse est déviée suivant deux figures latérales. La partie centrale est appelée composante d'ordre zéro alors que les deux lobes latéraux sont appelés composantes du 1er ordre. Dans la figure EC3(b) on peut voir l'évolution de la répartition de l'intensité normalisée (pour $y_0 = 0$) lorsque $m = 1$. Noter que la distance qui sépare les ordres de diffractions par rapport au centre est $f_0 \lambda z$. Par ailleurs, dans le meilleur des cas, lorsque $m = 1$, l'intensité des lobes diffractés ne peut dépasser 0,25 pour un réseau sinusoïdal en amplitude.

IV.Exercice

1. Test de connaissances

Formation des images

Répondre aux questions suivantes

Question 1

[Solution n°1 p 36]

Calculer les figures de diffraction de Fraunhofer d'une ouverture rectangulaire et d'une ouverture circulaire. Comparer la largeur des lobes centraux lorsque le côté du carré est égal au diamètre de l'ouverture circulaire. Conclure.

Question 2

[Solution n°2 p 41]

Soit un système imageur avec une pupille d'entrée carré de côté a , et un autre système avec une pupille circulaire de diamètre a . Calculer à chaque fois la fonction de transfert cohérente relative à ces pupilles en précisant les fréquences de coupures en fonction de a , la longueur d'onde λ , la distance d_i entre la pupille et le plan de l'image.

Question 3

[Solution n°3 p 42]

Calculer la fonction de transfert en éclairage incohérent dans le cas d'une pupille carré de côté a en précisant la fréquence de coupure en fonction de a , de la longueur d'onde λ , de la distance d_i entre la pupille et le plan de l'image. Comparer le résultat à la fréquence de coupure obtenue à la question précédente.

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 35)

Exemples de figures de diffraction de Fraunhofer - Ouverture rectangulaire

Considérons une ouverture rectangulaire dont la transmittance en amplitude est donnée par :

$$t(x_1, y_1) = \text{rect}\left(\frac{x_1}{L_x}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y_1}{L_y}\right)$$

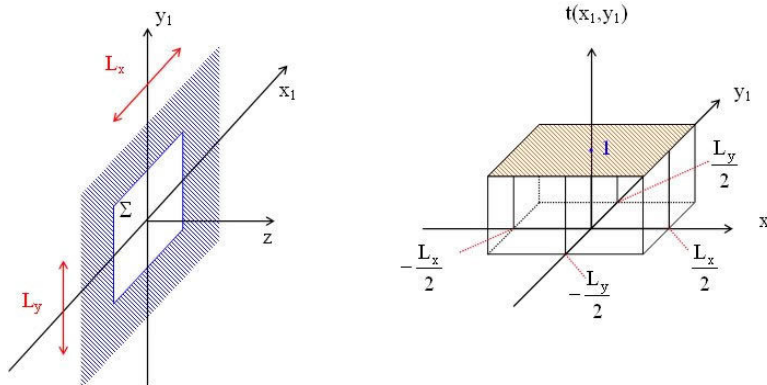


Image TC1- Ouverture rectangulaire et la représentation de sa transmittance.

L_x et L_y sont les dimensions de l'ouverture suivant x_1 et y_1 .

Si l'ouverture est éclairée sous incidence normale par une onde plane monochromatique d'amplitude unité ($U_i(x_1, y_1) = 1$), la distribution du champ dans l'ouverture ($U_t(x_1, y_1)$) est égale à la fonction transmittance :

$$t(x_1, y_1) = \frac{U_t(x_1, y_1)}{U_i(x_1, y_1)} = U_t(x_1, y_1)$$

En utilisant l'expression (III-3) caractérisant la répartition du champ dans la figure de diffraction de Fraunhofer, on écrit

$$U(x_0, y_0) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x_1, y_1) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}[x_0 x_1 + y_0 y_1]} dx_1 dy_1$$

où apparaît sous le signe intégrale la $TF[t(x_1, y_1)] = \tilde{T}(u, v)$ au point $u = x_0/\lambda z$; $v = y_0/\lambda z$. En s'appuyant sur le tableau 2 (partie Analyse de Fourier à deux dimensions, paragraphe couples de transformées relatifs à quelques fonctions séparables en coordonnées cartésiennes), on trouve facilement que :

$$\tilde{T}(u, v) = L_x L_y \text{sinc}(L_x u) \cdot \text{sinc}(L_y v)$$

Par conséquent l'expression du champ dans le plan d'observation devient :

$$U(x_0, y_0) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)} L_x L_y \text{sinc}\left(L_x \frac{x_0}{\lambda z}\right) \cdot \text{sinc}\left(L_y \frac{y_0}{\lambda z}\right)$$

et l'intensité de la lumière diffractée s'écrit :

$$I(x_0, y_0) = \left(\frac{L_x L_y}{\lambda z}\right)^2 \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{L_x x_0}{\lambda z}\right) \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{L_y y_0}{\lambda z}\right)$$

L'aspect de l'image dans le plan d'observation (en fausse couleur et avec $2L_x = L_y$ est donné par la figure suivante

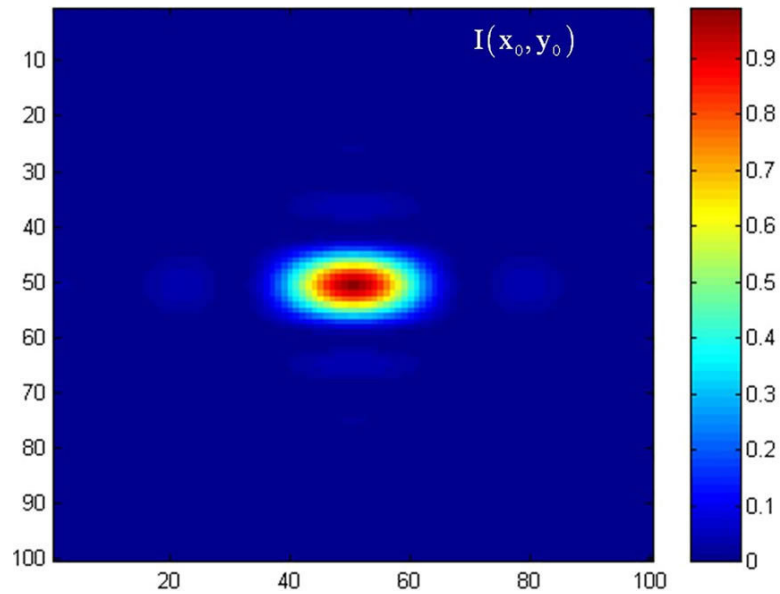


Image TC2 - Image représentant la figure de diffraction de Fraunhofer d'une ouverture rectangulaire.

Alors que la variation de cette même fonction est donnée par la figure TC3.

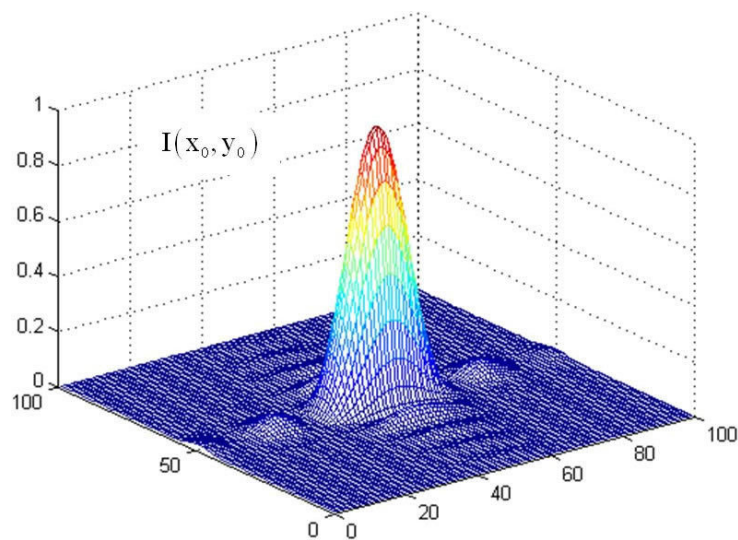


Image TC3 - Evolution de l'intensité dans le plan d'observation de l'image dans la figure TC2

Notons la présence des lobes diffractés en dehors des axes x_0 et y_0 , invisibles dans ces figures à cause de leurs trop faibles intensités. Pour les visualiser nous avons représenté dans la figure TC4 le logarithme de l'intensité.

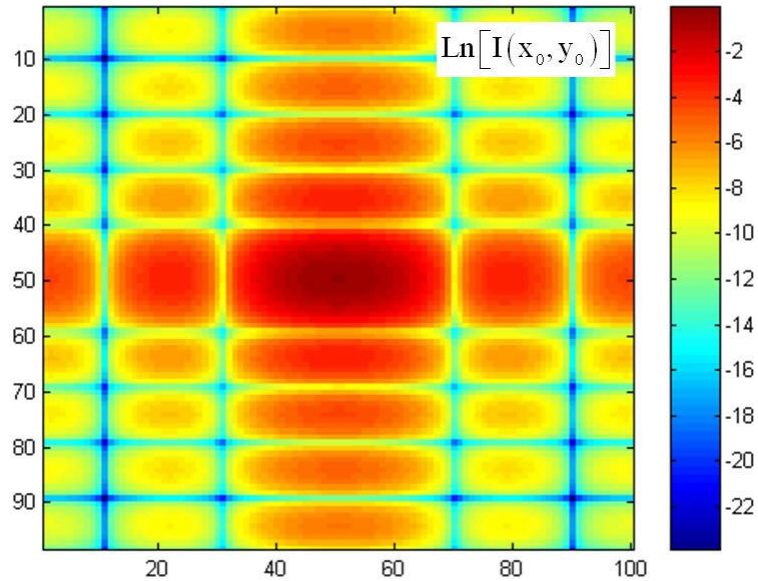


Image TC4 - Image représentant le log de l'intensité obtenue dans la figure TC2.

Relevons que la fonction sinus cardinal (défini dans le tableau 1 de la partie Analyse de Fourier à deux dimensions) s'annule pour les valeurs entières. Les zéros de part et d'autre de l'origine sont donnés par :

$$x_0 = \pm \frac{\lambda z}{L_x}$$

La largeur du lobe central suivant x_0 dans le plan d'observation est donc :

$$D_{rect} = 2 \frac{\lambda z}{L_x}$$

Exemples de figures de diffraction de Fraunhofer - Ouverture circulaire

Considérons une ouverture circulaire de rayon R (voir figure TC5).

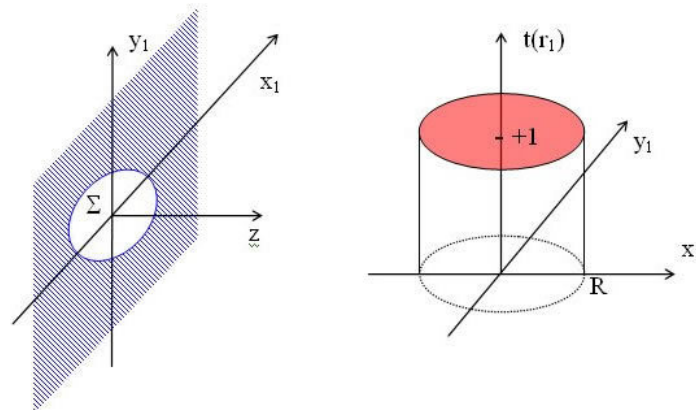


Image TC5- Ouverture circulaire et la représentation de sa transmittance.

Soient r_1 et r_0 , respectivement, les coordonnées radiales dans le plan de l'ouverture et dans le plan d'observation. Alors :

$$t(r_1) = \text{circ}\left(\frac{r_1}{R}\right)$$

Si l'ouverture est éclairée sous incidence normale par une onde plane monochromatique d'amplitude unité ($U_i(r_1) = 1$), la distribution du champ dans l'ouverture ($U_t(r_1)$) est égale à la fonction transmittance :

$$t(r_1) = \frac{U_t(r_1)}{U_i(r_1)} = U_t(r_1)$$

En utilisant l'expression (III-3) caractérisant la répartition du champ dans la figure de diffraction de Fraunhofer, on écrit :

$$U(x_0, y_0) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}[x_0^2 + y_0^2] + \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int t(x_1, y_1) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}[x_0 x_1 + y_0 y_1]} dx_1 dy_1$$

où apparaît sous le signe de l'intégrale :

$$TF[t(r_1)] = TF\left[\text{circ}\left(\frac{r_1}{R}\right)\right]$$

$$\tilde{T}(\rho) = B\left\{\text{circ}\left(\frac{r_1}{R}\right)\right\}$$

Ici, nous avons :

$$u = \frac{x_0}{\lambda z}$$

$$v = \frac{y_0}{\lambda z} \Rightarrow \rho = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\lambda z}$$

donc

$$\rho = \frac{r_0}{\lambda z}$$

En s'appuyant sur le paragraphe I.4.4 où nous avons démontré que

$$TF[\text{circ}(r)] = J_1(2\pi\rho)/\rho$$

et en appliquant le théorème de similitude on trouve facilement que :

$$\tilde{T}(\rho) = B\left\{\text{circ}\left(\frac{r_1}{R}\right)\right\} = R^2 \frac{J_1(2\pi R\rho)}{R\rho}$$

Multiplions par π le numérateur et le dénominateur et notons $S = \pi R^2$ la surface de l'ouverture.

La distribution de l'amplitude du champ dans le plan d'observation devient :

$$U(r_0) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \cdot e^{j\frac{kr_0^2}{2z}} \cdot S \cdot \frac{J_1\left(\frac{2\pi Rr_0}{\lambda z}\right)}{\frac{\pi Rr_0}{\lambda z}} \times \frac{2}{2}$$

$$U(r_0) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \cdot e^{j\frac{kr_0^2}{2z}} \cdot S \cdot \frac{2 \cdot J_1(kRr_0/z)}{kRr_0/z}$$

L'intensité s'écrit donc :

$$I(r_0) = \left(\frac{S}{\lambda z}\right)^2 \cdot \left[\frac{2 \cdot J_1(kRr_0/z)}{kRr_0/z}\right]^2$$

Cette distribution d'intensité est appelée «**figure d'Airy**». En normalisant la variable radiale : $r = 2Rr_0/\lambda z$, on peut voir la variation de cette figure de diffraction suivant l'expression simplifiée :

$$I(r_0) = I(0)[2J_1(\pi r)/\pi r]^2$$

dans la figure TC6.

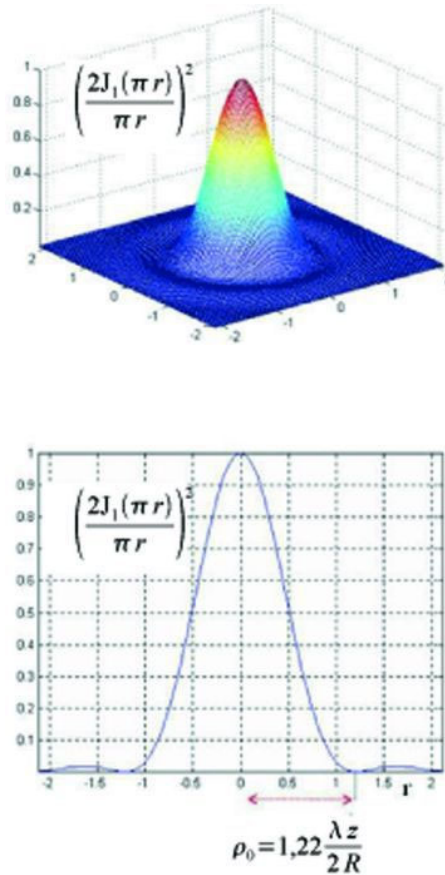


Image TC6 - Diffraction de Fraunhofer par une ouverture circulaire de rayon R (Variation de la figure de diffraction (dite tache d'Airy) dans le plan et suivant un axe radial).

A noter que le diamètre du lobe central est :

$$D_{circ} = 2\rho_0 = 1,22 \frac{\lambda z}{R}$$

On peut voir dans la figure TC7 l'aspect de la figure de diffraction dans le plan d'observation (en fausse couleur).

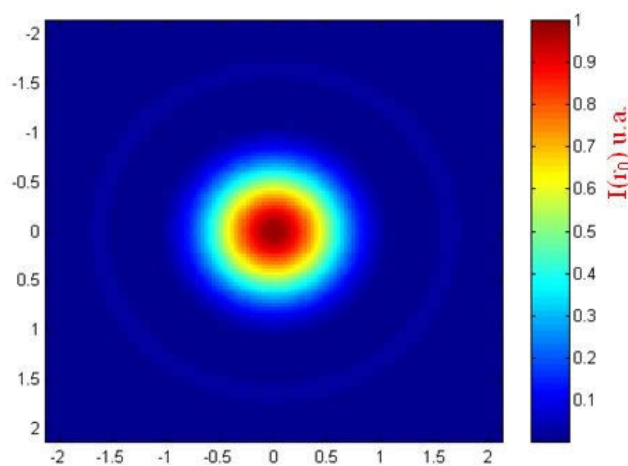


Image TC7- Aspect de la figure de diffraction dans le plan d'observation (en fausse couleur).

Remarque

En comparant la largeur du lobe central dans la figure de diffraction due à une ouverture rectangulaire (de largeur $\phi = L_x$) avec celle engendrée par une ouverture circulaire (de diamètre $\phi = 2R$), on peut constater une légère différence.

$$D_{circ} = 1.22 \frac{\lambda z}{\phi/2} = 2.44 \frac{\lambda z}{\phi}$$

et

$$D_{rect} = 2 \frac{\lambda z}{\phi}$$

Il est commode dans certains problèmes (voir figure TC8) (lorsque la précision recherchée n'est pas importante) de remplacer l'ouverture circulaire par une ouverture carré de coté égale au diamètre du cercle. On peut de cette façon simplifier les calculs.

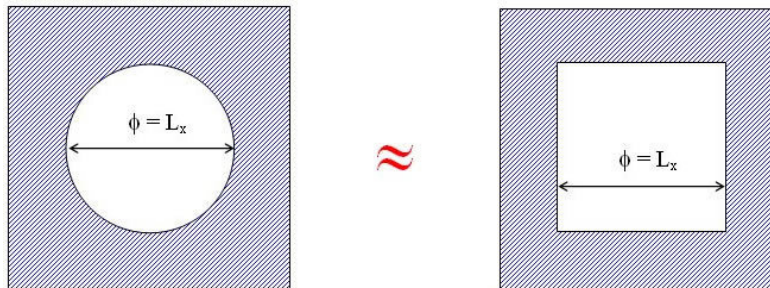


Image TC8- Equivalence entre une ouverture circulaire de diamètre égale au côté d'une ouverture carré

>Solution n°2 (exercice p. 35)

Exemples de fonctions de transfert en éclairage cohérent

Soit un système avec une pupille d'entrée (ou de sortie) carré de côté a , et un autre système avec une pupille circulaire de diamètre a .

$$P_1(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y}{a}\right) ; P_2(x, y) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a/2}\right)$$

L'expression (V-1) nous donne immédiatement les fonctions de transfert cohérentes (voir figure TC9):

$$\tilde{H}_1(u, v) = \text{rect}\left(\frac{\lambda d_i u}{a}\right) \cdot \left(\frac{\lambda d_i v}{a}\right) ; H_2(u, v) = \text{circ}\left(\lambda d_i \cdot \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{a/2}\right)$$

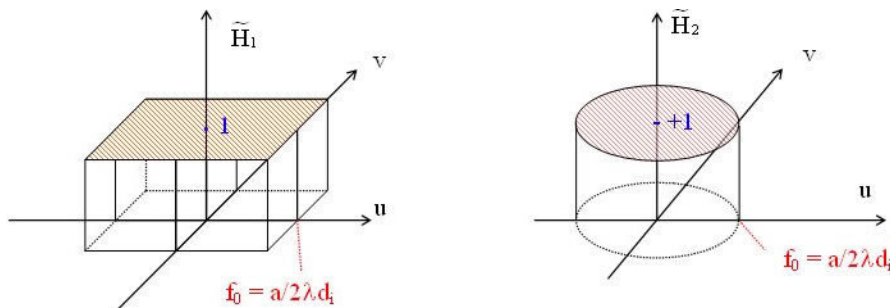


Image TC9 - Fonction de transfert en cohérent (a) pupille carré (b) pupille circulaire

A noter que dans chacun des cas la fréquence de coupure est $f_0 = a / 2\lambda d_i$

Ordre de grandeur

- $a = 2\text{cm}, d_i = 10\text{cm}, \lambda = 10^{-4}\text{cm} \rightarrow f_0 = 100\text{periods/mm}$

- Fréquence de coupure de l'œil : $\phi_{pupille} = 4 - 6mm, d_i = 15mm,$
 $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6}m \rightarrow f_0 = 300 \text{ periodes/mm}.$

Dimension de la période :

300p. correspond à 1mm

1p. correspond à $1/300 = 0.3 \cdot 10^{-2}mm = 3\mu m$

Il se trouve que la séparation entre les cônes pupillaires au niveau de la rétine est de $3\mu m.$

> **Solution n°3** (exercice p. 35)

Fonction de transfert en éclairage incohérent :

Considérons une pupille carré de côté $BB' = a.$ Au point de fréquences spatiales (u, v) (voir figure TC10), la surface commune est donnée par : $S(u, v) = AB \times BC.$ Or $AB = a - B'A$ et $B'A = \lambda d_i |u|$

pour des considérations géométriques.

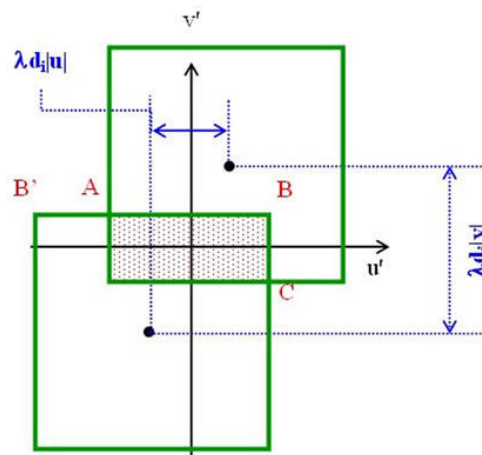


Image TC10 - Calcul de la FTM dans le cas d'un éclairage incohérent. Cas d'une pupille carré.

L'aire commune est donc :

$$S(u, v) = (a - \lambda d_i |u|)(a - \lambda d_i |v|)$$

$$\text{Si } \begin{cases} \lambda d_i |u| \leq a \\ \lambda d_i |v| \leq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |u| \leq \frac{a}{\lambda d_i} \\ |v| \leq \frac{a}{\lambda d_i} \end{cases}$$

$$\tilde{H}_i(u, v) = \frac{(a - \lambda d_i |u|)(a - \lambda d_i |v|)}{a^2} = \left(1 - \frac{\lambda d_i}{a} |u|\right) \left(1 - \frac{\lambda d_i}{a} |v|\right)$$

$$\text{Or : } \text{tri}(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\tilde{H}_i(u, v) = \text{tri}\left(\frac{u}{f_i}\right) \cdot \text{tri}\left(\frac{v}{f_i}\right)$$

$$\text{où } f_i = \frac{a}{\lambda d_i} = 2f_0$$

avec f_0 la fréquence de coupure en cohérent.

Remarquons que la fréquence de coupure en incohérent est le double de la fréquence de coupure du système en cohérent (ce n'est pas pour autant que le contraste est meilleur). Pour une pupille circulaire le calcul est plus complexe mais le résultat pour la fréquence de coupure f_i est le même.

Bibliographie

[Aspects of diffraction theory and their application to the ionosphere] RATCLIFFE J.A., *Aspects of diffraction theory and their application to the ionosphere*, In A.C. Strickland editor, The Physical Society, London, 1956, volume XIX, Reports on Progress in Physics.

[Introduction to Fourier Optics] GOODMAN J. W., *Introduction to Fourier Optics*, Mc Graw-Hill International Editions, -, 1996.

[L'intégrale de Fourier et ses applications à l'optique] DUFFIEUX P.M., *L'intégrale de Fourier et ses applications à l'optique*, Faculté des sciences, Besançon, 1946.

[The Fourier integral and its application] PAPOULIS A., *The Fourier integral and its application*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1962.

[The Fourier transform and its application] BRACEWELL R. N., *The Fourier transform and its application*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1965.

Crédit des ressources

Image I-1 - Représentations graphiques de quelques fonctions utilisées *p. 8*

G Boudebs

Image I-2 - Transformée de Fourier de la fonction cercle *p. 10*

G Boudebs

Image I-3 - Profil radial de la fonction figurant dans la figure I-2. *p. 10*

G Boudebs

Image II-1 - Ouverture diffractante. *p. 11*

G Boudebs

Image II-2- Propagation du spectre angulaire suivant z. *p. 13*

G Boudebs

Image II-3 -Ouverture diffractante dans le plan xOy *p. 15*

G Boudebs

Image IV-1 Lentille mince : vue de face et de profil *p. 18*

G Boudebs

Image IV-2- Divers type de lentilles convergentes *p. 19*

G Boudebs

Image IV-3- Divers type de lentilles divergentes *p. 19*

G Boudebs

Image IV-4- Objet placé contre la lentille *p. 20*

G Boudebs

Image IV-5- Objet placé contre la lentille *p. 21*

G Boudebs

Image IV-6- Objet placé à une distance d devant la lentille *p. 22*

G Boudebs

Image IV-7- Objet placé derrière la lentille à une distance d du plan focal *p. 23*

G Boudebs

Image IV-8- Schéma simplifié de la figure IV-7. Définition des variables intervenant dans le calcul. *p. 24*

G Boudebs

Image IV-9- Formation des images en éclairage monochromatique p. 25

G Boudebs

Image IV-10- Détermination de la réponse impulsionnelle d'un système imageur p. 26

G Boudebs

Image V-1- Schéma général d'un système formant des images p. 27

G Boudebs

Image V-2 - Système imageur selon Abbe p. 28

G Boudebs

Image V-3- Schéma général d'un éclairage cohérent. p. 29

G Boudebs

Image V-4- Schéma général d'un éclairage incohérent. p. 29

G Boudebs

Image V-5 - Fonction pupillaire et calcul de la FTM dans le cas d'un éclairage incohérent. p. 31

G Boudebs

Image EC1 - (a) Evolution de la fonction transmittance d'un réseau sinusoïdal en amplitude ; (b) image de ce réseau limité par une ouverture carré. p. 32

G Boudebs

Image EC2 - (a) les 3 fonctions sinus cardinal apparaissant dans l'amplitude du champ diffracté ; (b) agrandissement de la figure précédente pour comparer f_0 à $2/L$. p. 33

G Boudebs

Image EC3 - (a) Image montrant la figure de diffraction de Fraunhofer du réseau ; (b) Evolution de la répartition de l'intensité normalisée (en $y_0 = 0$) lorsque $m = 1$. p. 34

G Boudebs

Image TC1- Ouverture rectangulaire et la représentation de sa transmittance. p. 36

G Boudebs

Image TC2 - Image représentant la figure de diffraction de Fraunhofer d'une ouverture rectangulaire. p. 37

G Boudebs

Image TC3 - Evolution de l'intensité dans le plan d'observation de l'image dans la figure TC2 *p. 37*

G Boudebs

Image TC4 - Image représentant le log de l'intensité obtenue dans la figure TC2. *p. 38*

G Boudebs

Image TC5- Ouverture circulaire et la représentation de sa transmittance. *p. 38*

G Boudebs

Image TC6 - Diffraction de Fraunhofer par une ouverture circulaire de rayon R (Variation de la figure de diffraction (dite tache d'Airy) dans le plan et suivant un axe radial). *p. 40*

G Boudebs

Image TC7- Aspect de la figure de diffraction dans le plan d'observation (en fausse couleur). *p. 40*

G Boudebs

Image TC8- Equivalence entre une ouverture circulaire de diamètre égale au côté d'une ouverture carré *p. 41*

G Boudebs

Image TC9 - Fonction de transfert en cohérent (a) pupille carré (b) pupille circulaire *p. 41*

G Boudebs

Image TC10 - Calcul de la FTM dans le cas d'un éclairage incohérent. Cas d'une pupille carré. *p. 42*

G Boudebs