

Interférences : Fondamentaux

PASCAL PICART - JOËLLE SURREL

Table des matières

I. Présentation	3
II. Cours	4
1. Description ondulatoire de la lumière.....	4
1.1. Formalisme de Maxwell.....	4
1.2. Solutions harmoniques des équations de propagation.....	5
2. Superposition de deux ondes électromagnétiques : généralités.....	8
2.1. Notations.....	8
2.2. Champ résultant de la superposition.....	9
2.3. Notion de cohérence.....	9
2.4. Signal d'interférences.....	9
2.5. Cas de deux ondes planes.....	11
2.6. Cas de deux ondes sphériques.....	13
3. Cohérence temporelle.....	16
3.1. Interférogramme en lumière polychromatique.....	16
3.2. Longueur de cohérence.....	18
3.3. Illustrations.....	18
4. Cohérence spatiale.....	23
4.1. Interférogramme avec source étendue.....	23
4.2. Évaluation de la différence de marche.....	24
4.3. Deux types d'interféromètres.....	25
4.4. Éclairement en un point d'observation.....	26
4.5. Illustration.....	28
III. Etude de cas : interférences en lumière parfaitement cohérente	35
1. Étude du dispositif des trous d'Young en lumière monochromatique.....	37
2. Cas de la lumière blanche.....	38
IV. Exercice auto correctif	39
1. Questions de cours.....	39
2. Énoncé.....	40
3. Énoncé.....	40
4. Énoncé.....	40
V. test equation latex	43
Solution des exercices	44
Bibliographie	55
Crédit des ressources	56

I.Présentation

Module :

Interférences et Diffraction

Auteur(s) :

Pascal PICART¹&Joëlle SURREL² - ENSIM - Le Mans Université & IUT Saint-Étienne

Résumé :

Ce cours vous fera découvrir le phénomène d'interférences lumineuses et vous présentera ses propriétés physiques dues à la nature ondulatoire de la lumière. Le cours aborde le principe des interférences à partir des notions liées à la propagation des ondes. La formation des interférences est analysée pour des ondes plane et sphériques. On présente également les concepts de cohérence temporelle et cohérence spatiale de la lumière. L'étude de cas traite des interférences obtenues avec un dispositif de type trous d'Young et un éclairage monochromatique ou en lumière blanche. La partie exercice aborde l'ensemble des concepts de ce cours.

Mots-clés :

interférences, cohérence, cohérence temporelle, cohérence spatiale, interférence

Pré-requis :

-

Objectif(s) pédagogique(s) :

-

Plan du cours :

- Introduction
- Description ondulatoire de la lumière
- Superposition de deux ondes électromagnétiques : généralités
- Cohérence temporelle
- Cohérence spatiale
- Conclusion

Conception & production :

PRN - Le Mans Université

Licence :

Licence GNU³

1 - pascal.picart@univ-lemans.fr

2 - joelle.surrel@univ-st-etienne.fr

3 - <http://www.gnu.org/licenses/fdl.txt>

II. Cours

La propagation de la lumière peut être interprétée en terme de rayons lumineux indiquant la trajectoire suivie par la lumière. Par exemple, dans un milieu transparent homogène et isotrope, la lumière se propage de façon rectiligne. Cette approche est suffisante pour décrire un grand nombre de phénomènes lumineux. Cependant, les interférences lumineuses ne peuvent être décrites par une approche de type géométrique car la lumière se propage aussi sous forme d'ondes. Vers 1869, le physicien anglais Maxwell établit que cette onde peut être décrite par des ondes électromagnétiques constituées d'un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} . Le phénomène d'interférences intervient lorsque l'énergie, l'éclairement ou l'intensité résultant de la superposition de deux rayonnements n'est pas la somme de leurs énergies, éclairements ou de leurs intensités respectivement. Historiquement, ce résultat a beaucoup surpris au point qu'on a parlé du paradoxe des interférences, parfois résumé de façon provocante par *lumière+lumière = obscurité*.

Ce cours se propose d'aborder le cas des interférences à deux ondes, planes ou sphériques, d'analyser les effets de la largeur spectrale et spatiale de la source. L'étude de cas et la partie exercices traiteront de la réalisation d'interférences entre deux ondes à l'aide d'un dispositif de type trous d'Young.

1. Description ondulatoire de la lumière

1.1. Formalisme de Maxwell

Pour représenter une onde lumineuse, on lui associe comme grandeur physique les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} , décrits par une fonction de l'espace $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ et du temps t . Maxwell a montré que ces deux champs se propagent de façon couplée dans un milieu selon les équations suivantes (connues sous le nom « *d'équations de Maxwell* ») [1 [[1]]] :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{J} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

où μ est la perméabilité du milieu, ϵ est la permittivité du milieu, ρ est lié aux charges libres et de polarisation du milieu et \vec{J} est lié aux courants de conduction et de polarisation du milieu. Pour le vide, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ et $\epsilon_0 = 8,857 \times 10^{-12}$ et on a $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, c étant la vitesse de propagation dans le vide ($c = 3 \times 10^8$ m/s). Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope, en absence de charges libres, nous avons $\vec{J} = 0$, $\rho = 0$ et ϵ est une constante. C'est le cas, par exemple, du verre non contraint ou de l'air.

Les équations de Maxwell conduisent aux équations de propagation des champs magnétiques et électriques dont la forme générale est :

$$\Delta \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

où Δ est l'opérateur Laplacien vectoriel (on a $\Delta = \nabla^2$), n est l'indice de réfraction du milieu de propagation. Cette équation est également vérifiée par le champ magnétique.

On remarque que toutes les composantes de $\vec{E}, \{E_x, E_y, E_z\}$, et de $\vec{B}, \{B_x, B_y, B_z\}$, suivent la même équation de propagation :

$$\Delta E_x - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

et ainsi pour $\{E_y, E_z, B_x, B_y, B_z\}$.

Il est donc possible de synthétiser le comportement de ces composantes, par une unique onde scalaire $U(\vec{r}, t)$ régit par l'équation de propagation,

$$\Delta U(\vec{r}, t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 U(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

$U(\vec{r}, t)$ représentant l'une des composantes $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$.

Une **onde polarisée rectiligne** suivant x s'écrit :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = U(\vec{r}, t) \vec{e}_x$$

avec :

$$\begin{cases} E_x = U(\vec{r}, t) \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{cases}$$

Dans le cas où la propagation de l'onde présente une symétrie sphérique, le changement en coordonnées sphériques (r, θ, φ) amène à l'équation d'onde suivante :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

où $r = |\vec{r}|$.

1.2. Solutions harmoniques des équations de propagation

Les solutions de l'équation de propagation sont des fonctions scalaires ou vectorielles. Elles doivent reproduire « à un instant ultérieur » la même fonction « plus loin ». Pour être solution de l'équation, la fonction sera une fonction du type : $t \pm \frac{n \vec{r}}{c}$.

Généralement, pour les ondes se propageant vers les \vec{r} positifs on s'intéresse aux solutions harmoniques qui s'écrivent :

$$f\left(t - \frac{n}{c} \vec{r}\right) = A(r) \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

où $\vec{k} = k \vec{u}_0$ est le **vecteur d'onde** :

$$k = |\vec{k}| = n \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi n}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_m}$$

et \vec{u}_0 représente le vecteur orthonormé ($|\vec{u}_0| = 1$) décrivant la direction de propagation de l'onde, λ est la longueur d'onde dans le vide et λ_m la longueur d'onde dans le milieu. Pour les ondes se propageant vers les \vec{r} négatifs on s'intéresse aux solutions harmoniques qui s'écrivent :

$$g\left(t + \frac{n}{c} \vec{r}\right) = A(r) \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

Dans le cas où **l'onde est plane et monochromatique**, la propagation est rectiligne, suivant z par exemple, dans le vide l'équation de propagation s'écrit simplement :

$$\frac{\partial^2 U(\vec{r}, t)}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 U(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

et la solution se propageant vers les z positifs est :

$$U(\vec{r}, t) = U(z, t) = A_0 \exp[i(kz - \varphi_0 - \omega t)]$$

Rappel

La surface d'onde est définie, à un instant donné, par l'ensemble des points de l'espace dont la phase de l'onde, $(kz - \varphi_0 - \omega t)$, est identique.

La surface d'onde associée à la propagation est donnée par des plans équiphases tels que :

$$kz - \varphi_0 - \omega t = \text{constante}$$

elle est perpendiculaire au vecteur d'onde \vec{k} .

Dans le cas où **l'onde est sphérique**, la propagation est à symétrie sphérique et la solution se propageant vers les \vec{r} positifs est :

$$U(\vec{r}, t) = \frac{A_0}{r} \exp[i(-\omega t + kr - \varphi_0)]$$

Dans ce cas, la composante du champ ne dépend que de r avec un système de coordonnées centré sur le point de convergence (ou de divergence). Il s'agit du point source si c'est une onde divergente. d'un point de focalisation si c'est une onde convergente.

La surface équiphasse qui décrit la surface d'onde est une sphère centrée sur le point source. Une onde **divergente** s'écrit :

$$U(\vec{r}, t) = \frac{A_0}{r} \exp(-i\omega t) \exp(ikr - \varphi_0)$$

Pour une onde **convergente** :

$$U(\vec{r}, t) = \frac{A_0}{r} \exp(-i\omega t) \exp(-ikr - \varphi_0)$$

Il est utile d'expliciter le formalisme dans le cas d'un système de coordonnées rectangulaires (cartésien). Sur la figure 1, la source est située au point de coordonnées (X_s, Y_s, z) et l'onde se propage suivant les z positifs.

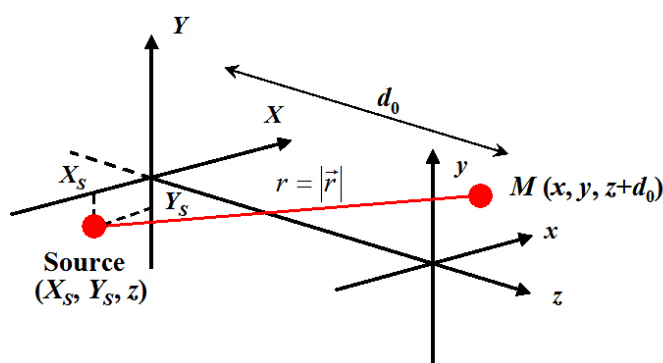


Figure 1 : Géométrie en coordonnées cartésiennes

D'après la figure, on constate que :

$$r = \sqrt{d_0^2 + (x - X_s)^2 + (y - Y_s)^2}$$

Le front d'onde propagé dans le plan $(x, y, z + d_0)$ situé à la distance $(z + d_0)$ de la source s'écrit [1 [[1]]] :

$$U(x, y, z + d_0, t) = A_0 \exp(-i\omega t) \frac{\exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda} \sqrt{d_0^2 + (x - X_s)^2 + (y - Y_s)^2}\right]}{\sqrt{d_0^2 + (x - X_s)^2 + (y - Y_s)^2}}$$

Cette expression ne se manipule pas facilement. Afin de réduire la complexité de l'écriture en coordonnées cartésiennes, on introduit des approximations sur la distance (d_0) entre la source et le front d'onde observé. Les approximations sont basées sur un développement de la racine carrée présente dans la fonction exponentielle [1 [[1]]]. En effet, dans le cas où $a \ll 1$, nous avons :

$$\sqrt{1+a} = 1 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{16}a^3 + \dots$$

et en ne retenant que les deux premiers termes du développement limité, il vient :

$$\sqrt{d_0^2 + (x - X_s)^2 + (y - Y_s)^2} \simeq d_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(x - X_s)^2}{d_0^2} + \frac{1}{2} \frac{(y - Y_s)^2}{d_0^2} \right)$$

Au dénominateur, on retient une approximation au premier ordre, soit :

$$\sqrt{d_0^2 + (x - X_s)^2 + (y - Y_s)^2} \simeq d_0$$

Ainsi, le front d'onde propagé dans le plan $(x, y, z + d_0)$ situé à la distance $(z + d_0)$ de la source s'écrit désormais :

$$U(x, y, z + d_0, t) = \frac{A_0}{d_0} \exp(-i\omega t) \exp\left(\frac{2i\pi d_0}{\lambda}\right) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_0} \left((x - X_s)^2 + (y - Y_s)^2 \right)\right]$$

Remarque

Les approximations (connues sous le nom d'approximations de Fresnel) reviennent à remplacer les ondelettes du fronts d'onde sphériques par des fronts d'onde **paraboliques**.

La validité de cette approximation est déterminée par les erreurs induites lorsque les termes d'ordres supérieurs du développement ne peuvent plus être négligés. Une condition suffisante est que la variation maximale de phase induite par le terme en $a^2/8$ génère une variation de phase qui soit très inférieure à 1 radian. Le lecteur pourra vérifier que la condition de validité est la suivante [1 [[1]]] :

$$d_0 \gg \sqrt[3]{\frac{\pi}{4\lambda} \left[(x - X_s)^2 + (y - Y_s)^2 \right]_{\max}^2}$$

Pour fixer les ordres de grandeur, considérons une source située en $(X_s, Y_s) = (0, 0)$ et une région d'observation carrée de 50 mm de coté, la longueur d'onde de la source étant égale à $0,5 \mu\text{m}$, on détermine $d_0 \gg 1349 \text{ mm}$.

2. Superposition de deux ondes électromagnétiques : généralités

2.1. Notations

On considère deux ondes électromagnétiques représentées par leurs champs électriques \vec{E}_1 et \vec{E}_2 . On note \vec{k}_1 et \vec{k}_2 leurs vecteurs d'ondes, ω_1 et ω_2 leurs pulsations et φ_1 et φ_2 leurs phases à l'origine.

Exemple

Pour un champ polarisé suivant la direction \vec{e}_1 , nous avons :

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = A_1(\vec{r}) \exp\left[i(-\omega_1 t + \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \varphi_1)\right] \vec{e}_1$$

et pour un champ polarisé suivant la direction \vec{e}_2 , nous avons :

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = A_2(\vec{r}) \exp\left[i(-\omega_2 t + \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \varphi_2)\right] \vec{e}_2$$

pour le champ \vec{E}_2 .

2.2. Champ résultant de la superposition

Considérons une zone de l'espace dans laquelle les deux rayonnements co-existent. En tout point de cet espace, le champ électromagnétique résultant est simplement égal à la somme des deux champs, soit :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t)$$

L'observateur, œil ou détecteur, est sensible au module carré du champ électromagnétique, soit $|\vec{E}(\vec{r}, t)|^2$. Cependant, il faut également prendre en compte le fait que le champ oscille à une pulsation ω de l'ordre de quelques 10^{14} Hz et que les meilleurs détecteurs actuels ne peuvent « voir » des phénomènes plus rapides que 10^{12} Hz. Il en découle que le signal observé est une moyenne statistique de $|\vec{E}(\vec{r}, t)|^2$, soit [2 [[2]]] :

$$I(\vec{r}, t) = \langle |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \rangle$$

où $\langle \dots \rangle$ signifie moyenne statistique.

2.3. Notion de cohérence

Le développement de l'expression précédente donne :

$$I(\vec{r}, t) = \langle |\vec{E}_1(\vec{r}, t)|^2 \rangle + \langle |\vec{E}_2(\vec{r}, t)|^2 \rangle + 2 \Re e \left\{ \langle \vec{E}_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}_2^*(\vec{r}, t) \rangle \right\}$$

On constate que :

$$\begin{cases} \langle |\vec{E}_1(\vec{r}, t)|^2 \rangle = \langle A_1^2(\vec{r}) \rangle = A_1^2(\vec{r}) \\ \langle |\vec{E}_2(\vec{r}, t)|^2 \rangle = \langle A_2^2(\vec{r}) \rangle = A_2^2(\vec{r}) \\ 2 \Re e \left\{ \langle \vec{E}_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}_2^*(\vec{r}, t) \rangle \right\} = 2 A_1(\vec{r}) A_2(\vec{r}) \langle \cos((\omega_2 - \omega_1)t + (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + \varphi_2 - \varphi_1) \rangle \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \end{cases}$$

Le dernier terme représente le terme d'interférences des deux champs, appelé également **modulation des interférences. Ce terme est nul si :**

- les deux ondes sont polarisées perpendiculairement, par exemple suivant $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$ et $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$ puisque alors $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$; cette condition est appelée **cohérence de polarisation**
- les deux pulsations sont très différentes $\omega_1 \neq \omega_2$, puisque alors le terme en cosinus oscille très rapidement à une pulsation proche de 10^{14} Hz et il n'est pas observable par un œil ou un détecteur ; cette condition est appelée **cohérence temporelle**
- les vecteurs d'ondes varient fortement dans la zone d'observation $\vec{k}_1(\vec{r}) \neq \text{constant}$ et $\vec{k}_2(\vec{r}) \neq \text{constant}$, puisque alors le terme en cosinus oscille très rapidement dans

l'espace, conduisant à une moyenne nulle, et il n'est pas observable par un œil ou un détecteur ; cette condition est appelée **cohérence spatiale**

Les notions de cohérence seront abordées par la suite.

2.4. Signal d'interférences

Dans ce qui suit on considère que les deux ondes sont **cohérentes temporellement, spatialement** et en **polarisation**. Dans ce contexte, le signal observable s'écrit simplement :

$$I(\vec{r}) = A_1^2(\vec{r}) + A_2^2(\vec{r}) + 2 A_1(\vec{r}) A_2(\vec{r}) \cos\left(\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right) \cdot \vec{r} + \varphi_2 - \varphi_1\right)$$

On sous entend la dépendance spatiale avec \vec{r} par la suite à chaque fois que ce sera possible. Si on pose $I_1 = A_1^2$ et $I_2 = A_2^2$, le signal d'interférences s'écrit aussi [3 [[3]]] :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$$

avec :

$$\frac{2\pi\delta}{\lambda} = \left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right) \cdot \vec{r} + \varphi_2 - \varphi_1$$

où on note δ la différence de chemin optique entre les deux ondes.

Le phénomène d'interférences se manifeste par une alternance de zones sombres pour lesquelles $\cos(\dots) = -1$ et de zones brillantes pour lesquelles $\cos(\dots) = +1$. Notons I_{\min} le signal minimum et I_{\max} le signal maximum, nous avons :

$$\begin{cases} I_{\min} = A_1^2 + A_2^2 - 2 A_1 A_2 \\ I_{\max} = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \end{cases}$$

On caractérise le contraste entre ces deux zones extrémales par le facteur de visibilité [3 [[3]]] :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2 A_1 A_2}{A_1^2 + A_2^2}$$

Le contraste maximum est égal à 1 et il est obtenu pour $A_1 = A_2$, c'est à dire que les deux ondes ont même amplitude en tout point de l'espace. Si $A_1 \neq A_2$, le contraste est inférieur à 1 et si $A_1 \ll A_2$ ou si $A_1 \gg A_2$, on a $C \simeq 0$.

Les zones de maxima sont obtenues pour $\cos(\dots) = +1$, soit

$$\varphi = \left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right) \cdot \vec{r} + \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi \quad k \in \mathbb{R}$$

Les zones de minima sont obtenues pour $\cos(\dots) = -1$, soit

$$\varphi = \left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right) \cdot \vec{r} + \varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi \quad k \in \mathbb{R}$$

Le terme φ s'appelle la phase des interférences. Il est constitué de la différence des phases optiques des deux ondes et il est proportionnel à une différence de chemins optiques.

La distance, dans le **plan d'observation**, qui sépare **deux zones consécutives de même nature** est appelée **interfrange**.

La figure 2 illustre les propriétés du signal d'interférences.

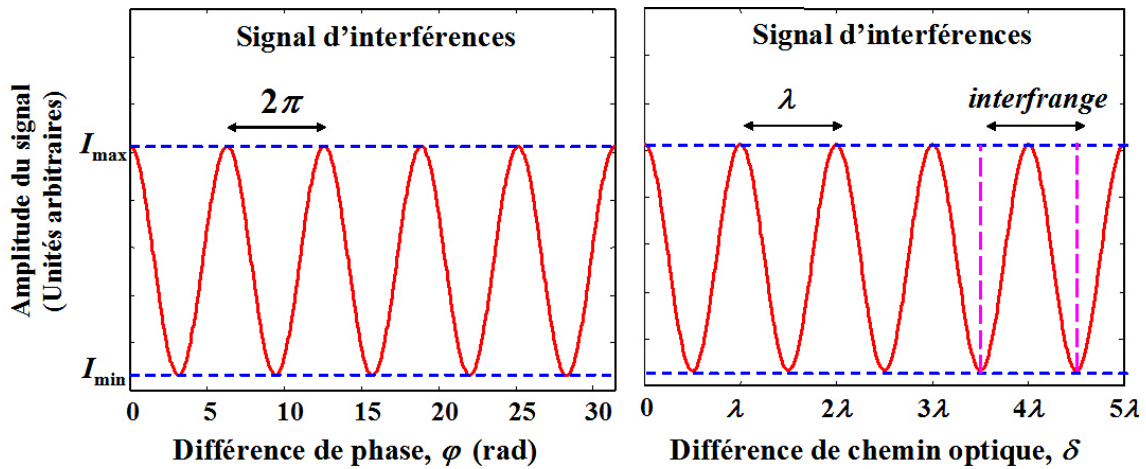


Figure 2 : Signal d'interférences

On s'intéresse maintenant à deux cas particuliers : les deux ondes sont planes et les deux ondes sont sphériques.

2.5. Cas de deux ondes planes

Considérons deux ondes planes se propageant vers les z positifs et de vecteurs d'ondes non colinéaires à z mais appartenant au plan $\{x, z\}$. La figure 3 illustre la géométrie du problème.

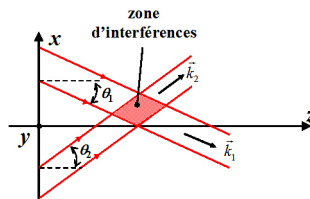


Figure 3 : Interférences de deux ondes planes, géométrie

Dans ce cas, nous avons simplement :

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = A_1 \exp \left[i \left(-\omega t + \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \varphi_1 \right) \right] \vec{e}_x$$

pour la première onde et :

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = A_2 \exp \left[i \left(-\omega t + \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \varphi_2 \right) \right] \vec{e}_x$$

pour la seconde. Compte tenu que :

$$\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta_1 \vec{e}_z - \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_1 \vec{e}_x$$

$$\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta_2 \vec{e}_z + \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_2 \vec{e}_x$$

et que :

$$\varphi = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) z - \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) x + \varphi_2 - \varphi_1$$

Fondamental

le signal d'interférences s'écrit :

$$I(x, y, z) = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) z - \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) x + \varphi_2 - \varphi_1 \right)$$

La figure 4 montre le champ spatial d'interférences dans la zone de superposition des deux ondes.

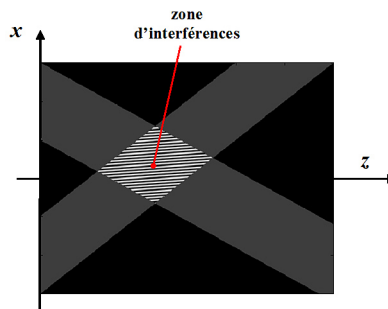


Figure 4 : Structure du champ d'interférences

La distance qui sépare deux zones consécutives de même nature est l'interfrange. Pour z constant, l'abscisse x de la frange brillante d'ordre k quelconque est tel que :

$$\frac{2\pi}{\lambda} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) z_k - \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) x_k + \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$$

Dans la direction x , pour la frange brillante consécutive à la précédente, la phase optique a varié de 2π et nous avons :

$$\frac{2\pi}{\lambda} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) z_k - \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) x_{k+1} + \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi + 2\pi$$

suivant la direction x , la distance qui sépare les deux franges brillantes (interfrange en x) est donc définie par :

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \theta_1 + \sin \theta_2}$$

où $\Delta x = x_k - x_{k+1}$.

En raisonnant de la même façon dans la direction z , il vient l'interfrange en z :

$$\Delta z = \frac{\lambda}{\cos \theta_1 - \cos \theta_2}$$

où $\Delta z = z_{k+1} - z_k$.

Dans le cas où $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ il vient :

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \\ \Delta z = \infty \end{cases}$$

Les franges sont donc parallèles à l'axe z .

Pour fixer les ordres de grandeurs, considérons $\lambda = 0,5$ microns et $\theta = 30$, nous obtenons $\Delta x = \frac{0,5}{2 \sin(30)} = 0,5$ microns. L'interfrange est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde. Le passage d'une frange brillante à une autre offre donc une sensibilité sub-micrométrique.

2.6. Cas de deux ondes sphériques

Considérons deux ondes sphériques co-polarisées (c'est à dire polarisées parallèlement) suivant x et se propageant vers les z positifs. La figure 5 illustre la géométrie du problème.

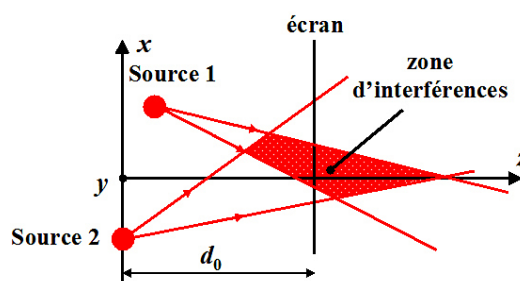


Figure 5 : Interférences de deux ondes sphériques, géométrie dans le plan de coupe

Dans ce cas, nous avons simplement :

$$\vec{E}_1(\vec{r}_1, t) = \frac{A_1}{r_1} \exp(-i \omega t) \exp(i k r_1 - i \varphi_1) \vec{e}_x$$

pour la première onde et :

$$\vec{E}_2(\vec{r}_2, t) = \frac{A_2}{r_2} \exp(-i \omega t) \exp(i k r_2 - i \varphi_2) \vec{e}_x$$

pour la seconde. Notons (x_1, y_1, z_1) , et (x_2, y_2, z_2) les coordonnées des points sources des deux ondes sphériques. Nous avons en tout point de coordonnées (x, y, z) :

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \quad (i = 1, 2)$$

La phase des interférences est $\varphi = k r_1 - k r_2 + \varphi_2 - \varphi_1$, soit :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} - \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2} \right) + \varphi_2 - \varphi_1$$

Fondamental

Le signal d'interférences s'écrit :

$$I(x, y, z) = \frac{A_1^2}{r_1^2} + \frac{A_2^2}{r_2^2} + 2 \frac{A_1 A_2}{r_1 r_2} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} - \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2} \right) + \varphi_2 - \varphi_1 \right)$$

La figure 6 montre le champ spatial d'interférences dans la zone de superposition des deux ondes dans le plan (x, z) à gauche et dans le plan de coupe à droite (plan $(x, y, z = d_0)$).

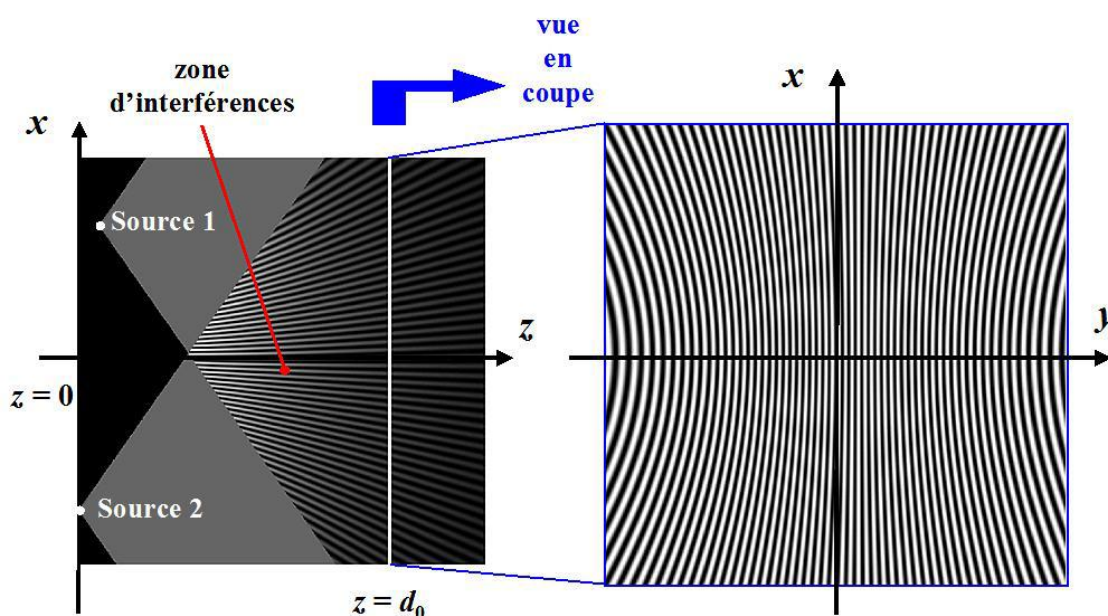


Figure 6 : Structure du champ d'interférences avec des ondes sphériques

On constate que l'amplitude des interférences décroît avec la distance aux sources. Ceci est dû au terme en $1/r_i$ en facteur de chaque amplitude complexe. On pourra admettre que « loin des sources » ce terme est approximativement constant.

Attention

Les franges sont courbes, ce qui n'était pas le cas pour les interférences obtenues avec des ondes planes. Dans le plan $(x, y, z = d_0)$ les franges sont des arcs d'hyperboles.

Dans l'espace (x, y, z) , une frange brillante est localisée par la condition :

$$\frac{2\pi}{\lambda} \left(\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} - \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2} \right) + \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$$

soit :

$$\left(\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} - \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2} \right) = \alpha \lambda$$

avec $\alpha = k + (\varphi_1 - \varphi_2)/2\pi$. Cette relation n'est pas d'une utilisation simple.

Cependant on peut expliciter l'interfrange dans le cas de l'approximation parabolique. Posons $d_1 = z - z_1$ et $d_2 = z - z_2$. A la condition que l'approximation de Fresnel soit valable, une frange brillante est localisée par la condition :

$$\frac{2\pi d_1}{\lambda} + \frac{\pi}{\lambda d_1} \left((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 \right) - \frac{2\pi d_2}{\lambda} - \frac{\pi}{\lambda d_2} \left((x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 \right) + \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$$

ce qui donne :

$$\frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) - x \left(\frac{x_1}{d_1} - \frac{x_2}{d_2} \right) - y \left(\frac{y_1}{d_1} - \frac{y_2}{d_2} \right) = \alpha' \lambda$$

avec :

$$\alpha' = k + \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{2\pi} - \frac{d_1 - d_2}{\lambda} - \frac{x_1^2 + y_1^2}{2\lambda d_1} + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2\lambda d_2}$$

Considérons un cas idéal : supposons que les sources soient placées symétriquement sur l'axe x de part et d'autre de l'origine en $x_1 = +a/2$ et $x_2 = -a/2$ avec $y_1 = y_2 = 0$ et $d_1 = d_2 = d_0$ et que la zone d'observation est placée à $z = d_0 \gg a$ (figure 7).

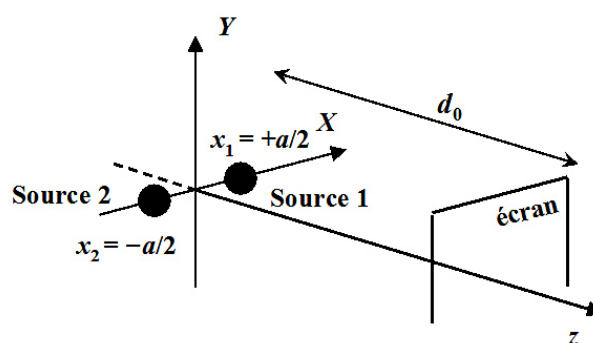


Figure 7 : Géométrie symétrique

Dans ce cas, il vient simplement :

$$\frac{ax}{d_0} = \alpha' \lambda$$

Avec cette configuration, les franges sont rectilignes et verticales parallèles à l'axe Y . On peut observer sur la figure 6 que ce résultat correspond au centre de l'écran. La frange brillante d'ordre k est donc localisée en x_k tel que :

$$\frac{ax_k}{d_0} = \alpha' \lambda$$

et la frange brillante suivante, d'ordre $k + 1$ est localisée en x_{k+1} tel que :

$$\frac{ax_{k+1}}{d_0} = \alpha' \lambda + \lambda$$

L'interfrange est donc :

$$i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda d_0}{a}$$

Avec l'approximation parabolique, l'interfrange est constante suivant la direction x .

Remarque

La figure 6 montre que ce résultat est valable au centre de l'écran, et que l'interfrange augmente lorsqu'on s'éloigne du centre puisque les franges sont des arcs d'hyperboles.

3. Cohérence temporelle

Nous avons vu au paragraphe "*Champ résultant de la superposition*" que le contenu spectral des ondes qui interfèrent influence le signal et en particulier le terme de modulation. Dans le cas où les deux ondes sont parfaitement monochromatiques et de même longueur d'onde les franges ont un contraste maximum. Ce paragraphe se propose d'étudier l'influence de la **largeur spectrale** des ondes sur le contraste de la figure de franges. L'influence de la largeur spectrale de la source décrit la **cohérence temporelle** de la lumière. La description du contenu spectral de la source est basée sur la notion de **densité spectrale d'énergie**. Cette notion sera précisée dans les paragraphes suivants.

3.1. Interférogramme en lumière polychromatique

Dans le cas où les deux ondes sont issues d'une source polychromatique, la représentation spectrale de la source ne correspond plus à une raie unique localisée en σ_0 , nombre d'onde de la source (ou bien en λ_0 longueur d'onde ou ν_0 fréquence ou ω_0 pulsation). Le spectre, ou densité spectrale d'énergie, noté $S_S(\sigma)$, est composé d'une enveloppe $S_0(\sigma)$ centrée sur le nombre d'onde moyen σ_0 .

La figure 8 illustre la représentation spectrale d'une source.

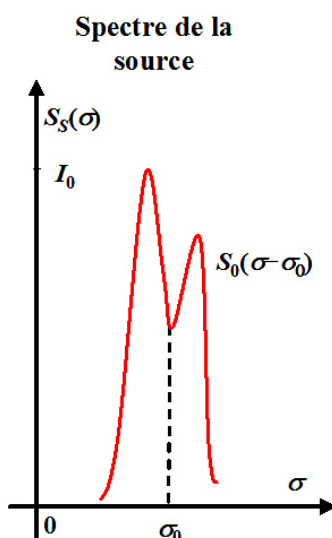


Figure 8 : Représentation spectrale de la source

D'après le paragraphe "Signal d'interférences", le signal d'interférence peut s'écrire synthétiquement :

$$I(\delta, \sigma) = a S_s(\sigma) + b S_s(\sigma) \cos(2\pi \delta \sigma)$$

où :

$$a = I_1 + I_2 \quad b = 2\sqrt{I_1 I_2}$$

où δ est la différence de chemin optique entre les deux ondes. Le signal devient désormais :

$$I(\delta) = \int_0^{\infty} I(\sigma, \delta) d\sigma$$

L'interférogramme (nom donné à la représentation du signal d'interférences) s'écrit sous forme intégrale [2 [[2]]] :

$$I(\delta) = a \int_0^{\infty} S_s(\sigma) d\sigma + b \int_0^{\infty} S_s(\sigma) \cos(2\pi \delta \sigma) d\sigma$$

Le spectre de la source, c'est à dire la représentation spectrale de la source, est par nature réel et nul pour toute valeur $\sigma < 0$. Il vient donc, puisque $S_s(\sigma)$ est réel :

$$\int_0^{+\infty} S_s(\sigma) \cos(2\pi \delta \sigma) d\sigma = \Re \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_s(\sigma) \exp(-2i\pi \delta \sigma) d\sigma \right] = \Re \left[\widetilde{S}_s(\delta) \right]$$

où $\widetilde{S}_s(\delta)$ est la transformée de Fourier de la densité spectrale d'énergie de la source, et on constate que :

$$I(\delta) = a \Re \left[\widetilde{S}_s(0) \right] + b \Re \left[\widetilde{S}_s(\delta) \right]$$

Attention

Ce résultat signifie donc que l'interférogramme observé en présence de lumière polychromatique est directement lié à la transformée de Fourier du spectre de la source.

Qualitativement, si la source a un spectre étroit, alors l'interférogramme sera étendu et si la source a un spectre très large alors l'interférogramme sera très localisé au voisinage de $\delta = 0$. Écrivons le spectre de la façon suivante :

$$S_s(\sigma) = S_0(\sigma - \sigma_0) = S_0(\sigma) * \delta(\sigma - \sigma_0)$$

où $\delta(\sigma)$ est la distribution de Dirac et * signifie convolution. On obtient alors :

$$\Re \left[\widetilde{S}_s(\delta) \right] = \Re \left[\widetilde{S}_0(\delta) \times \exp(-2i\pi \sigma_0 \delta) \right] = \Re \left[\widetilde{S}_0(\delta) \right] \cos(2\pi \sigma_0 \delta)$$

En $\delta = 0$, on a $\Re \left[\vec{S}_S(0) \right] = \Re \left[\vec{S}_0(0) \right]$ et la répartition d'intensité en fonction de δ devient :

$$I(\delta) = \Re \left[\tilde{S}_0(0) \right] \left(a + b \Re \left[\frac{\tilde{S}_0(\delta)}{\tilde{S}_0(0)} \right] \cos(2\pi \sigma_0 \delta) \right)$$

Le terme de modulation du cosinus s'appelle le degré de cohérence temporelle de la source. On note le degré de cohérence temporelle :

$$\gamma_{c,t}(\delta) = \Re \left[\frac{\tilde{S}_0(\delta)}{\tilde{S}_0(0)} \right]$$

Fondamental

Ce résultat constitue le **théorème de Wiener-Kinchine** [2 [[2]]] : il démontre que le degré de cohérence temporelle au point M de l'écran est égal à la valeur numérique de la transformée de Fourier de la densité spectrale d'énergie de la source, calculée à la valeur de la différence de marche au point M. Le degré de cohérence temporelle est normalisé de sorte que $\gamma_{c,t} = 1$ si la source est monochromatique, la cohérence temporelle étant évidemment parfaite si la source n'émet qu'une seule radiation.

3.2. Longueur de cohérence

La longueur de cohérence de la source est définie par rapport au degré de cohérence. On a :

$$l_c = \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_{c,t}(\delta)|^2 d\delta$$

Le temps de cohérence de la source est alors donné par :

$$\tau_c = \frac{l_c}{c}$$

où c est la vitesse de l'onde dans le vide. Le temps de cohérence peut être interprété comme étant la durée moyenne d'un train d'onde émis par la source.

Remarque

En un point d'observation M, si la différence de marche est supérieure à la longueur de cohérence, le phénomène d'interférence n'est plus observable. L'éclairement apparaît uniformément blanc. Cette teinte est appelée blanc d'ordre supérieur. Si cet éclairement est analysé, on observe un **spectre cannelé** ce qui signifie qu'il manque quelques longueurs d'onde. Ces dernières correspondent à des interférences destructives.

3.3. Illustrations

Considérons quelques sources et l'interférogramme associé [[2] [4]] :

a) Cas d'une radiation monochromatique

Dans le cas où le spectre n'est composé que d'une onde monochromatique de longueur d'onde λ_0 , on peut modéliser le spectre par :

$$S_s(\sigma) = I_0 \delta(\sigma - \sigma_0)$$

L'enveloppe spectrale est donc restreinte à une distribution de Dirac $S_0(\sigma) = I_0 \delta(\sigma)$. La transformée de Fourier de $S_0(\sigma)$ est $\vec{S}_0(\delta) = I_0$. Le degré de cohérence est :

$$\gamma_{c,t}(\delta) = 1$$

La longueur de cohérence de la source est donc infinie puisque le degré de cohérence n'est pas sommable. Le signal d'interférences est alors :

$$I(\delta) = a I_0 + b I_0 \cos(2\pi \sigma_0 \delta)$$

Le spectre et l'interférogramme associé sont représentés sur la figure 9 pour une source monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$.

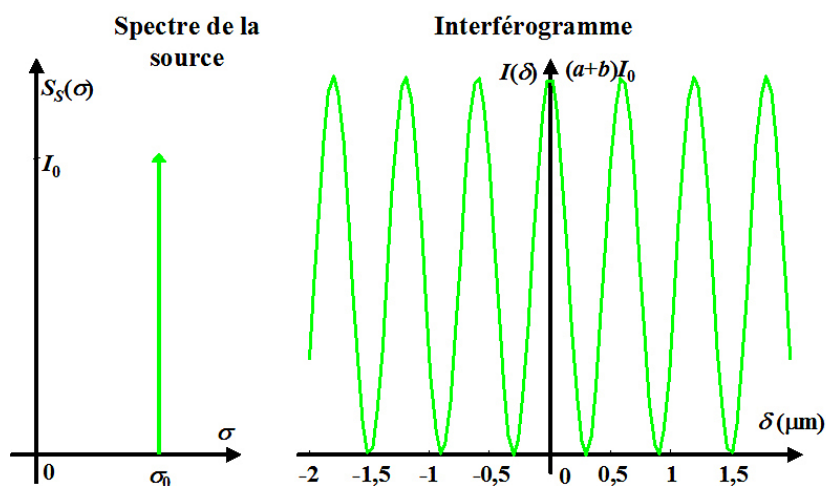


Figure 9 : Spectre et interférogramme d'une source monochromatique (cas $a=b$)

b) Cas d'un doublet

Si la source comporte deux radiations monochromatiques de nombres d'onde σ_1 et σ_2 avec $\sigma_2 > \sigma_1$ et de même amplitude I_0 , on peut modéliser son spectre par :

$$S_s(\sigma) = I_0 \delta(\sigma - \sigma_1) + I_0 \delta(\sigma - \sigma_2)$$

Dans ce cas, le nombre d'onde moyen du spectre est $\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ et l'intervalle spectral est $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$. On a alors :

$$S_s(\sigma) = I_0 \delta\left(\sigma - \sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}\right) + I_0 \delta\left(\sigma - \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}\right)$$

et puisque $S_0(\sigma)$ est l'enveloppe du spectre (voir figure 8), nous avons :

$$S_0(\sigma) = I_0 \delta\left(\sigma - \frac{\Delta\sigma}{2}\right) + I_0 \delta\left(\sigma + \frac{\Delta\sigma}{2}\right)$$

dont la transformée de Fourier est :

$$\tilde{S}_0(\delta) = 2 I_0 \cos(\pi \Delta\sigma \delta)$$

Le degré de cohérence temporelle est alors :

$$\gamma_{c,t}(\delta) = \cos(\pi \Delta\sigma \delta)$$

Le signal d'interférences s'écrit :

$$I(\delta) = 2a I_0 + 2b I_0 \cos(\pi \Delta\sigma \delta) \cos(2\pi \sigma_0 \delta)$$

L'interférogramme présente des **battements**. Ils sont représentés sur la figure 10 dans le cas où $\lambda_1 = 600 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 650 \text{ nm}$.

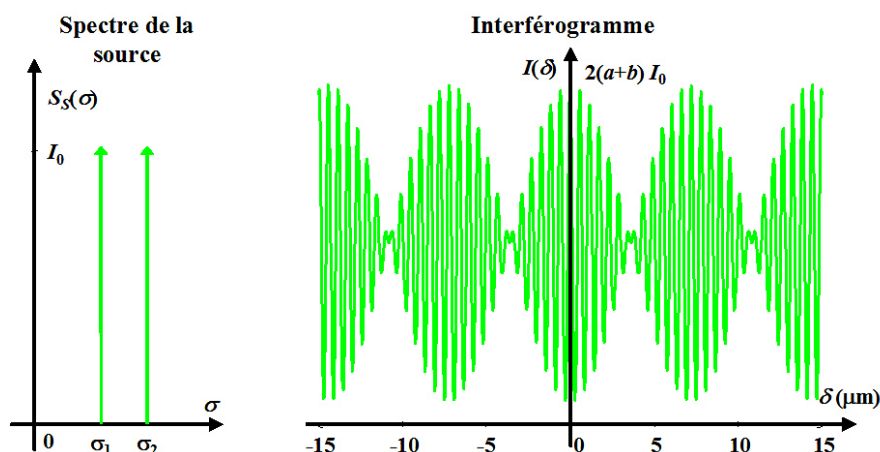


Figure 10 : Spectre et interférogramme d'un doublet

Pour ce cas idéal où la largeur de raie est considérée infiniment mince, la longueur de cohérence de la source est également infinie puisque le degré n'est pas sommable. Cependant, dans la réalité, il faudrait considérer la largeur de chaque raie ainsi qu'un modèle pour le profil de raie. On trouverait alors que le degré de cohérence est sommable et que la longueur de cohérence n'est pas infinie mais qu'elle dépend fortement de la largeur de raie.

c) Cas d'une répartition spectrale rectangulaire

Si on considère une répartition spectrale uniforme sur l'intervalle $\Delta\sigma$ centré sur σ_0 et d'amplitude I_0 , le spectre est décrit par la fonction :

$$S_s(\sigma) = I_0 \Pi_{\Delta\sigma}(\sigma - \sigma_0)$$

et :

$$S_0(\sigma) = I_0 \Pi_{\Delta\sigma}(\sigma)$$

dont la transformée de Fourier est :

$$\tilde{S}_0(\delta) = \Delta\sigma I_0 \text{sinc}(\Delta\sigma \delta)$$

Remarque

Dans tout ce qui suit la fonction sinuscardinal est définie par :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

La répartition d'intensité s'écrit :

$$I(\delta) = I_0 \Delta\sigma (a + b \text{sinc}(\Delta\sigma \delta) \cos(2\pi \sigma_0 \delta))$$

Le degré de cohérence d'une telle source est donc :

$$\gamma_{c,i}(\delta) = \text{sinc}(\Delta\sigma \delta)$$

Le spectre et l'interférogramme sont représentés sur la figure 11 dans le cas où $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ et $\Delta\lambda = 400 \text{ nm}$ (modèle simplifié de lumière blanche).

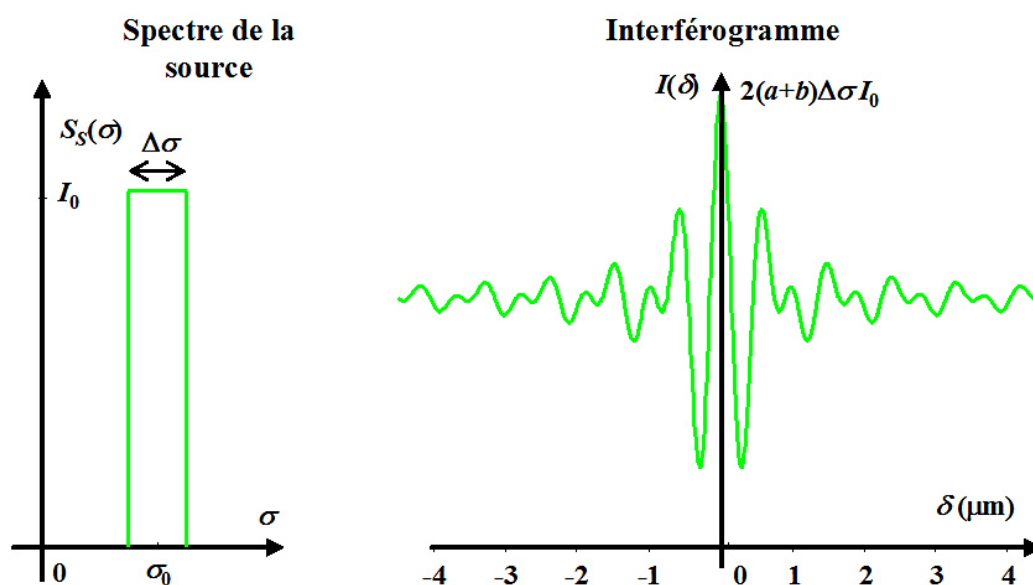


Figure 11 : Spectre et interférogramme d'une source à spectre uniforme

La longueur de cohérence est obtenue en calculant :

$$l_c = \int_{-\infty}^{+\infty} |\text{sinc}(\Delta \sigma \delta)|^2 d\delta$$

ce qui donne :

$$l_c = \frac{1}{\Delta \sigma} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$$

Avec les valeurs numériques, on trouve $l_c = 0,9$ microns et $\tau_c = 0,3$ fs.

d) Cas d'une raie monochromatique à répartition spectrale lorentzienne

Cette situation correspond à l'élargissement des raies réelles par l'effet Doppler dû à l'agitation thermique dans le milieu d'émission. L'intensité spectrale peut être modélisée par :

$$S_s(\sigma) = \frac{I_0}{1 + 4(\sigma - \sigma_0)^2 / \Delta \sigma^2}$$

où $\Delta \sigma$ représente la largeur de la raie à mi hauteur.

L'enveloppe de la répartition spectrale est décrite par :

$$S_0(\sigma) = \frac{I_0}{1 + 4\sigma^2 / \Delta \sigma^2}$$

dont la transformée de Fourier est :

$$\tilde{S}_0(\delta) = \frac{\pi}{2} \Delta \sigma I_0 \exp(-\pi \Delta \sigma |\delta|)$$

Le degré de cohérence temporelle est :

$$\gamma_{c,t}(\delta) = \exp(-\pi \Delta \sigma |\delta|)$$

L'intensité a pour expression :

$$I(\delta) = \frac{\pi}{2} \Delta \sigma I_0 (a + b \exp(-\pi \Delta \sigma |\delta|) \cos(2\pi \sigma_0 \delta))$$

Plus la raie est large et plus la décroissance de l'interférogramme est rapide, donc plus vite il n'y a plus possibilité d'observer la modulation du signal. Le spectre et l'interférogramme sont représentés schématiquement sur la figure 12.

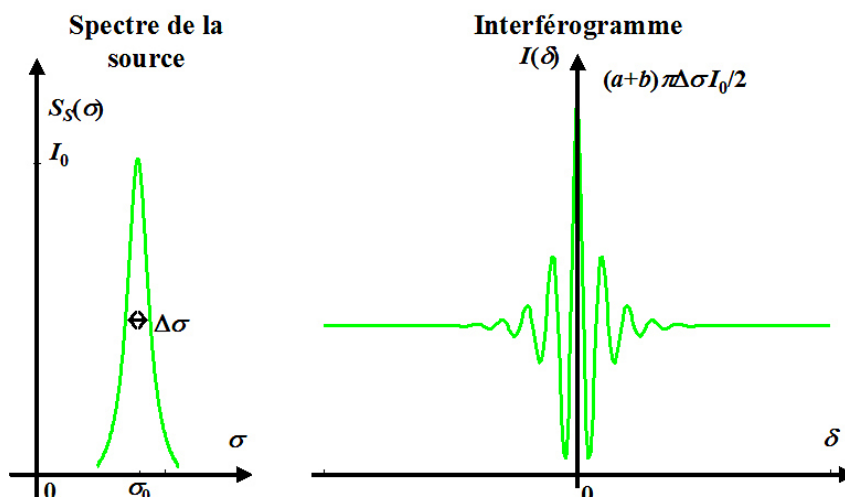


Figure 12 : Spectre et interférogramme d'une émission monomode lorentzienne

La longueur de cohérence est :

$$l_c = \int_{-\infty}^{+\infty} |\exp(-\pi \Delta \sigma |\delta|)|^2 d\delta$$

ce qui donne :

$$l_c = \frac{1}{\pi \Delta \sigma} = 0,318 \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$$

Par exemple, dans le cas d'une diode laser pour laquelle $\lambda_0 = 669 \text{ nm}$ et $\Delta \nu = 100 \text{ MHz}$ on a $\Delta \lambda = 1,2 \times 10^{-4} \text{ nm}$. On calcule que $l_c = 95,4 \text{ cm}$ et $\tau_c = 3,18 \text{ ns}$. La représentation graphique de l'interférogramme sur une variation de différence de marche égale à la longueur de cohérence n'est pas possible en raison du trop grand nombre d'oscillations du $\cos(2\pi\sigma_0\delta)$ sous la courbe de modulation.

4. Cohérence spatiale

Nous avons vu au paragraphe "Champ résultant de la superposition" que les vecteurs d'ondes des ondes qui interfèrent influencent le signal et en particulier le terme en cosinus. Dans le cas où les deux ondes sont parfaitement monochromatiques et de même longueur d'onde, le signal d'interférences s'écrit sous la forme :

$$I = a + b \cos(2\pi \delta / \lambda) = a + b \cos(2\pi \delta \sigma)$$

Ce paragraphe se propose d'étudier l'influence de la largeur spatiale de la source, dont sont issues les ondes, sur le contraste de la figure de franges. L'influence de la **largeur spatiale** de la source décrit la **cohérence spatiale** de la lumière. Dans tout dispositif interférométrique, on cherche à générer deux ondes à partir d'une onde produite par une unique source. Les solutions techniques sont relativement diverses mais on constate que l'on peut toujours identifier deux sources secondaires à partir desquelles se propagent les ondes qui vont former les interférences. Dans ce qui suit, on considérera la présence de ces deux sources secondaires sans discuter des moyens techniques nécessaires à leur création. Le cours « **Dispositifs**

interférentiels » abordera les interféromètres de façon exhaustive. Le lecteur souhaitant les aborder de façon concrète est invité à consulter ce cours.

4.1. Interférogramme avec source étendue

Dans le cas où les deux ondes sont issues d'une source étendue, à chaque point de la source correspond des vecteurs d'onde. Ainsi, chaque point de la source va contribuer à former un interférogramme. Dans le plan d'observation on observe donc la superposition de tous les interférogrammes produits par tous les points de la source.

Remarque

Qualitativement, si tous les interférogrammes sont légèrement déphasés un à un, il se produira un brouillage du signal d'interférence qui se traduira par une baisse de modulation des franges. La baisse de modulation est du même type que pour la cohérence temporelle : l'amplitude du cosinus est pondérée par le degré de cohérence spatiale de la source.

L'ensemble des points de la source sont caractérisés par leur luminance. Chaque élément de la surface de la source, $dXdY$, centré en S , donne après un système interférentiel, une répartition lumineuse du type [2 [[2]]] :

$$dI \propto L(S) dX dY \times (a + b \cos(2\pi \delta \sigma)) = L(S) dX dY \times (a + b \Re\{\exp(2i\pi \delta \sigma)\})$$

Les deux sources virtuelles « synchrones » créées à partir d'une source unique par le système interférentiel sont appelées « sources secondaires ». Sur la figure 13 sont représentées les deux sources secondaires par S_1 et S_2 . Les sources secondaires S_1 et S_2 ont pour coordonnées respectives (x'_1, y'_1) et (x'_2, y'_2) . La largeur de la source primaire est matérialisée par le vecteur $\vec{dS} = \overline{SS'}$.

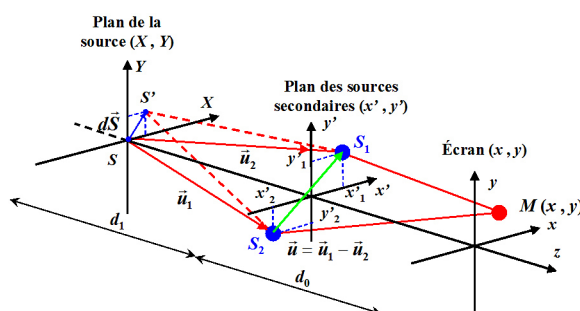


Figure 13

Figure 13 : Le déplacement d'un point source de \vec{dS} produit une variation de la différence de marche

4.2. Évaluation de la différence de marche

Pour un point S' quelconque de la source, la différence de marche en un point M d'observation de coordonnées (x, y) peut être décomposée en deux parties. L'une prend en compte la différence de marche introduite entre la source et les sources secondaires, la seconde partie entre les sources secondaires et le point M d'observation :

$$\delta(S') = ([S'S_2] - [S'S_1]) + ([S_2M] - [S_1M])$$

avec :

$$[S'S_2] - [S'S_1] = \Delta(X, Y) = \sqrt{(X - x'_2)^2 + (Y - y'_2)^2 + d_1^2} - \sqrt{(X - x'_1)^2 + (Y - y'_1)^2 + d_1^2}$$

A la condition que les dimensions transverses restent petites devant la distance séparant la source primaire des deux sources secondaires ($|\vec{dS}|, |S_1S_2| \ll d_1$), on peut écrire :

$$\Delta(X, Y) = d_1 + \frac{1}{2d_1} \left((X - x'_2)^2 + (Y - y'_2)^2 \right) - d_1 - \frac{1}{2d_1} \left((X - x'_1)^2 + (Y - y'_1)^2 \right)$$

ce qui donne :

$$\Delta(X, Y) = \frac{x'^2_2 + y'^2_2}{2d_1} - \frac{x'^2_1 + y'^2_1}{2d_1} + \frac{X(x'_1 - x'_2) + Y(y'_1 - y'_2)}{d_1}$$

On en déduit donc :

$$\delta(S') = \delta_0 + \frac{X(x'_1 - x'_2) + Y(y'_1 - y'_2)}{d_1}$$

où

$$\delta_0 = ([S_2M]) - ([S_1M]) + \frac{x'^2_2 + y'^2_2}{2d_1} - \frac{x'^2_1 + y'^2_1}{2d_1}$$

Remarque

Pour le point S, et les sources secondaires placées symétriquement, on retrouve :

$$\delta(S) = ([S_2M]) - ([S_1M])$$

D'après les expressions précédentes, on constate que la différence de marche s'écrit aussi :

$$\delta(S') = \delta_0 + \frac{1}{d_1} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot d\vec{S}$$

où $\vec{u}_1 = \overrightarrow{SS_1}$ et $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \overrightarrow{S_2S_1}$.

Cette expression amène à quelques conclusions :

- Il n'y a pas de variation de la différence de marche avec la largeur de la source quand :
 - le déplacement $d\vec{S}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$. Dans ce cas le trou source peut être remplacé par une fente source sans détériorer le contraste des franges.
 - si les deux vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont colinéaires, l'interféromètre est dit de type à division d'amplitude et une source large peut être utilisée.
- La différence de marche en S' a pour expression : $\delta(S') = \delta_0 + \alpha X + \beta Y$
 où $(\alpha, \beta) = ((x'_1 - x'_2)/d_1, (y'_1 - y'_2)/d_1)$ sont les angles apparents sous lesquels sont vues les deux sources secondaires depuis le centre S de la source dans les deux directions transversales du repère d'axes.

3. Quand le vecteur \vec{u} est parallèle au vecteur déplacement $d\vec{S}$, la différence de marche s'exprime par : $\delta(S') = \delta_0 + \alpha\Delta S$
 il y aura brouillage dès que la variation de la différence de marche sera égale à $\lambda/2$, soit

$$\alpha\Delta S \leq \frac{\lambda}{2}$$

 ce qui correspond à une largeur angulaire de cohérence spatiale de l'ordre de :

$$\alpha_c \leq \frac{\lambda}{2\Delta S} .$$

4.3. Deux types d'interféromètres

Dans le paragraphe précédent il a été mentionné qu'il existait des interféromètres à division d'amplitude caractérisés par le fait que les vecteurs unitaires \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont colinéaires, ce qui signifie que les rayons qui interfèrent, correspondent à deux émergents de l'interféromètre issus d'un même incident.

L'autre catégorie d'interféromètres est dite à division de front d'onde. Ces derniers présentent l'inconvénient de ne pas pouvoir être utilisés avec une source large car les franges se brouillent très rapidement avec la dimension de la source. Pour les deux types d'interféromètres quand la source est ponctuelle les interférences sont non localisées c'est à dire observables dans tout le champ. En revanche dans le cas d'une source large avec un interféromètre à division d'amplitude les interférences sont localisées aux points d'intersections des paires de rayons émergents correspondants à un même rayon incident.

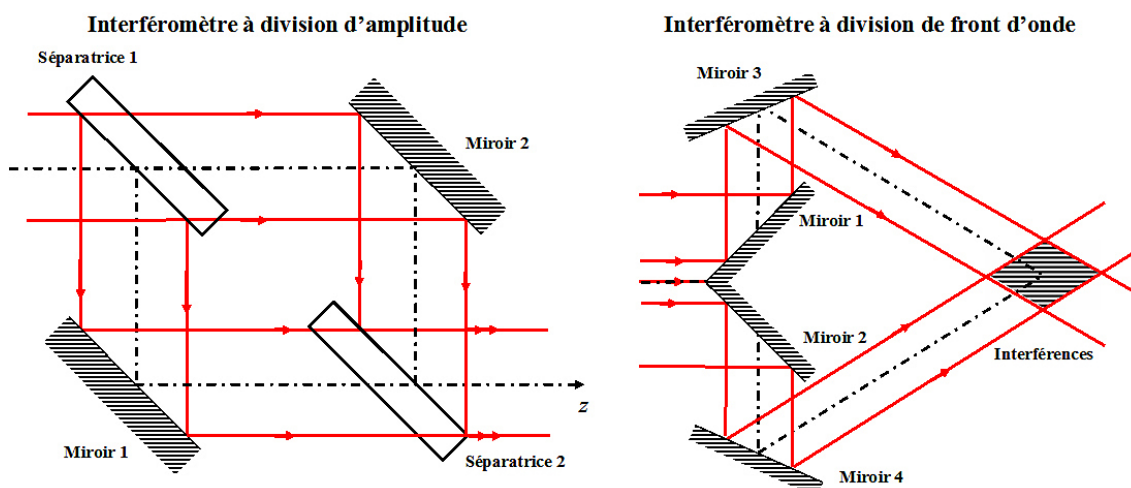


Figure 14 : Les deux types d'interféromètres

Le tableau ci dessous synthétise les remarques précédentes.

	Division de front d'onde	Division d'amplitude
Source ponctuelle	Interférences non localisées	Interférences non localisées
Source étendue	Pas d'interférences	Interférences localisées

Tableau 1 : Différentes catégories d'interféromètres

Dans le cours « **Dispositifs interférentiels** » le lecteur trouvera différents exemples et des analyses de tels dispositifs.

4.4. Éclairement en un point d'observation

L'élément de source $dXdY$ donne au point M d'observation d'abscisse (x, y) l'intensité :

$$dI \propto L(S') dX dY \times (a + b \Re \{ \exp(-2i\pi\delta(S')\sigma) \})$$

soit en remplaçant $\delta(S')$ par son expression :

$$dI \propto L(X, Y) dX dY \times (a + b \Re \{ \exp(-2i\pi\sigma(\delta_0 + \alpha X + \beta Y)) \})$$

Pour l'ensemble de la source, les différents points émettent de façon incohérente :

$$I = \int_{source} dI$$

soit :

$$I = a \int_{source} L(X, Y) dX dY + b \Re \{ \exp(2i\pi\sigma\delta_0) \int_{source} L(X, Y) \exp(-2i\pi\sigma(\alpha X + \beta Y)) dX dY \}$$

Cette expression est réécrite :

$$I = a \int_{-\infty}^{+\infty} L(X, Y) dX dY + b \cos(2\pi\sigma\delta_0) \Re \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} L(X, Y) \exp(2i\pi(\sigma\alpha X + \sigma\beta Y)) dX dY \right\}$$

on constate que :

$$I = a \Re \{ \tilde{L}(0, 0) \} + b \Re \{ \tilde{L}(\sigma\alpha, \sigma\beta) \} \cos(2\pi\sigma\delta_0)$$

où $\tilde{L}(\sigma\alpha, \sigma\beta)$ est la transformée de Fourier de la répartition de luminance de la source. Ce résultat signifie que l'interférogramme observé en présence d'une source étendue est directement lié à la transformée de Fourier de la répartition de luminance de la source.

Pour $\alpha = \beta = 0$, on a $\tilde{L}(0) = \Re \{ \tilde{L}(0) \}$ et l'interférogramme devient :

$$I = \Re \{ \tilde{L}(0, 0) \} \left(a + b \Re \left[\frac{\tilde{L}(\sigma\alpha, \sigma\beta)}{\tilde{L}(0, 0)} \right] \cos(2\pi\sigma\delta_0) \right)$$

Le terme de modulation du cosinus s'appelle le degré de cohérence spatiale de la source. On notera le degré de cohérence spatiale

$$\gamma_{c,s}(\alpha, \beta) = \Re \left[\frac{\tilde{L}(\sigma\alpha, \sigma\beta)}{\tilde{L}(0, 0)} \right]$$

Fondamental

Ce résultat constitue le **théorème de Van Cittert-Zernike** [2 [[2]]] : il démontre que le degré de cohérence spatiale au point M de l'écran est égal à la valeur numérique de la transformée de Fourier de la répartition de luminance de la source, calculée aux coordonnées angulaires sous lesquelles les sources secondaires sont vues depuis le

centre de la source primaire. Le degré de cohérence spatiale est normalisé de sorte que $\gamma_{c,s} = 1$ si S_1 est confondue avec S_2 , la cohérence spatiale est évidemment parfaite.

Remarque

Contrairement au cas de la cohérence temporelle, **le contraste ne dépend pas de la valeur de la différence de marche**, il dépend de l'angle sous lequel sont vus les sources secondaires depuis le centre de la source. Il diminue quand les angles α et β augmentent (voir illustration figure 15).

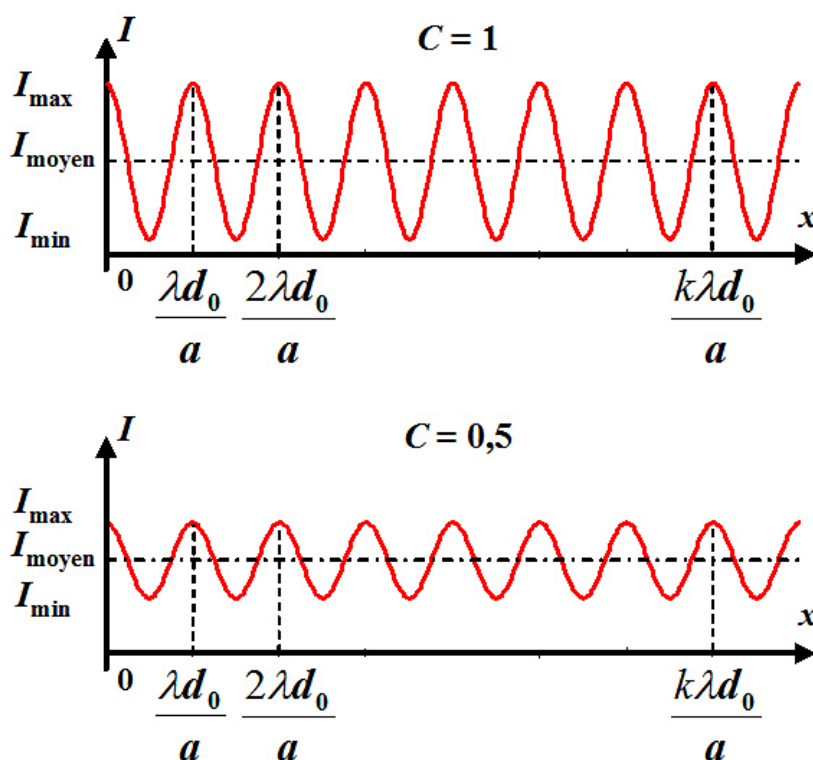


Figure 15 : Pour une source de dimension donnée le contraste des franges est constant

4.5. Illustration

a) Cas d'une source circulaire

On s'intéresse à la baisse de contraste induite par une source étendue de forme circulaire émettant une radiation monochromatique $\lambda = 500 \text{ nm}$. La figure 16 donne les notations. On notera R le rayon de la source

D'après la définition de la fonction luminance, il découle :

$$\tilde{L}(\rho, \phi) = 2\pi \int_0^{+R} r J_0(2\pi\sigma r \rho) dr$$

En posant $u = 2\pi\sigma r \rho$, on obtient :

$$\tilde{L}(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\rho^2} \int_0^{+2\pi\sigma\rho R} u J_0(u) du$$

Avec l'égalité :

$$\int_0^x u J_0(u) du = x J_1(x)$$

J_1 étant la fonction de Bessel d'ordre 1 telle que $J_1(0) = 0$, on obtient finalement :

$$\tilde{L}(\rho, \phi) = R \frac{J_1(2\pi\sigma\rho R)}{\sigma\rho} = \pi R^2 \frac{2J_1(2\pi\sigma\rho R)}{2\pi\sigma\rho R}$$

Comme nous avons :

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2/d_1^2 + (y'_1 - y'_2)^2/d_1^2} = a/d_1$$

le degré de cohérence spatiale de la source circulaire s'écrit finalement ($2J_1(0)/0 = 1$):

$$\gamma_{c,s} = \Re \left[\frac{\tilde{L}(\sigma\alpha, \sigma\beta)}{\tilde{L}(0,0)} \right] = \Re \left[\frac{\tilde{L}(\rho, \phi)}{\tilde{L}(0,0)} \right] = \frac{2J_1\left(\frac{2\pi a R}{\lambda d_1}\right)}{\frac{2\pi a R}{\lambda d_1}}$$

Le degré de cohérence spatiale de la source circulaire est de la forme $2J_1(Z)/Z$ où $Z = 2\pi a R / \lambda d_1$. La figure 17 montre le profil du degré de cohérence spatiale de la source de forme circulaire en fonction de la valeur de Z exprimée en radians.

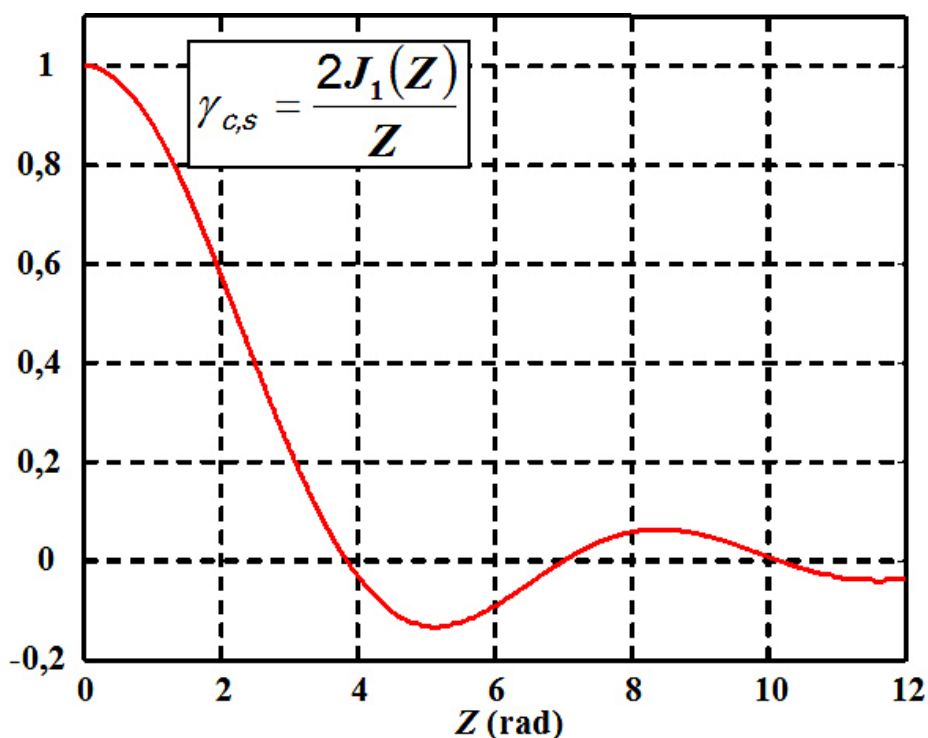


Figure 17 : Degré de cohérence de la source étendue circulaire

Le Tableau 2 donne les valeurs de Z pour les maxima, minima et zéros successifs du degré de cohérence.

Z (rad)	$\frac{2J_1(Z)}{Z}$	max / min / zéro
0	1	max
3,832	0	zéro
5,136	-0,1323	min
7,015	0	zéro
8,416	0,0648	max
10,172	0	zéro
11,620	-0,04	min

Tableau 2 : minima et maxima du degré de cohérence spatiale

Les zéros du degré de cohérence ne sont pas équidistants. La première annulation du contraste est obtenue pour :

$$\frac{2\pi a R}{\lambda d_1} = 3,832$$

soit pour un écart entre les sources secondaires égal à :

$$a = 1,22 \frac{\lambda d_1}{2R}$$

On rappelle que R représente le rayon de la source.

En fonction du diamètre angulaire $\alpha_s = 2R/d_1$ sous lequel on voit la source depuis le plan des sources secondaires, nous obtenons

$$a = 1,22 \frac{\lambda}{\alpha_s}$$

A titre d'exemple numérique, considérons le cas du Soleil, pour lequel l'angle apparent sous lequel il est observé depuis la terre est $\alpha_s = 32' \text{ d'arc} = 9 \times 10^{-3} \text{ rad}$. La relation précédente donne $a \simeq 68 \text{ microns}$ pour $\lambda = 0,5 \text{ microns}$. Si on veut observer des interférences contrastées au point **M** d'un écran, il faudra que les deux sources secondaires ne soient pas distantes de plus de cette valeur. La lumière qui provient du Soleil possède donc une très faible cohérence spatiale.

Pour des sources secondaires de même amplitude, le signal d'interférences au point **M** sur l'écran s'écrit finalement sous la forme :

$$I(M) = I_0 \left(1 + \frac{2J_1(2\pi a R / \lambda d_1)}{2\pi a R / \lambda d_1} \cos(2\pi \sigma \delta_0) \right)$$

La figure 18 montre les interférogrammes obtenus dans le plan de l'écran pour différentes valeurs du degré de cohérence.

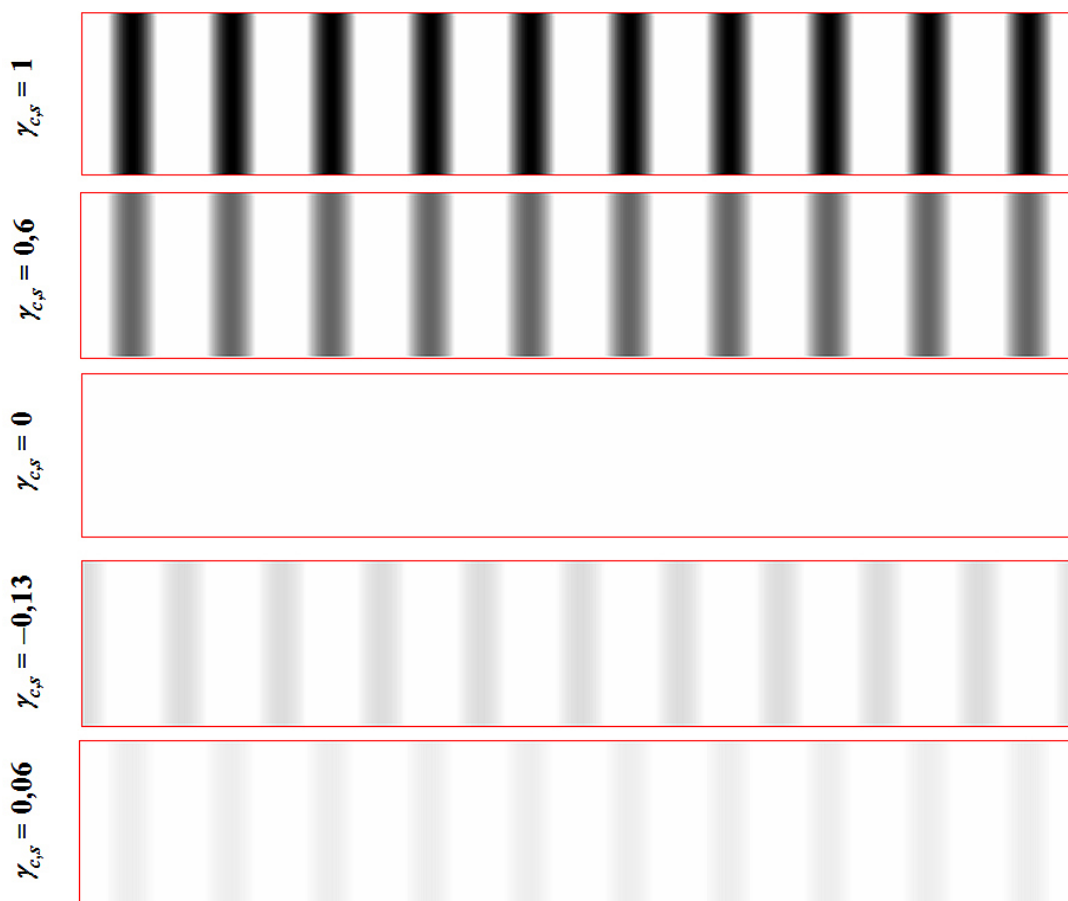


Figure 18 : Degré de cohérence de la source étendue circulaire

Le contraste des franges évolue en fonction du rayon R de la source suivant la courbe de la figure 17. Pour une faible valeur de R , le contraste des franges est sensiblement égal à l'unité. Lorsqu'on augmente R , le contraste diminue puis devient nul pour $a = 1,22\lambda d_1 / 2R$. Ensuite, il devient négatif et les franges brillantes occupent alors la position des franges sombres et réciproquement ; c'est l'inversion du contraste que l'on peut observer assez facilement sur la

figure 18, le contraste étant cependant assez faible en valeur absolue ($|\gamma_{c,sl}| = 0,13$). Si on continue à augmenter la valeur de R , les franges deviennent de moins en moins visibles et finissent par complètement disparaître.

b) Cas d'une source rectangulaire

On s'intéresse maintenant à la baisse de contraste induite par une source étendue de forme rectangulaire. La figure 19 illustre les notations. On notera (L_x, L_y) les dimensions de la source.

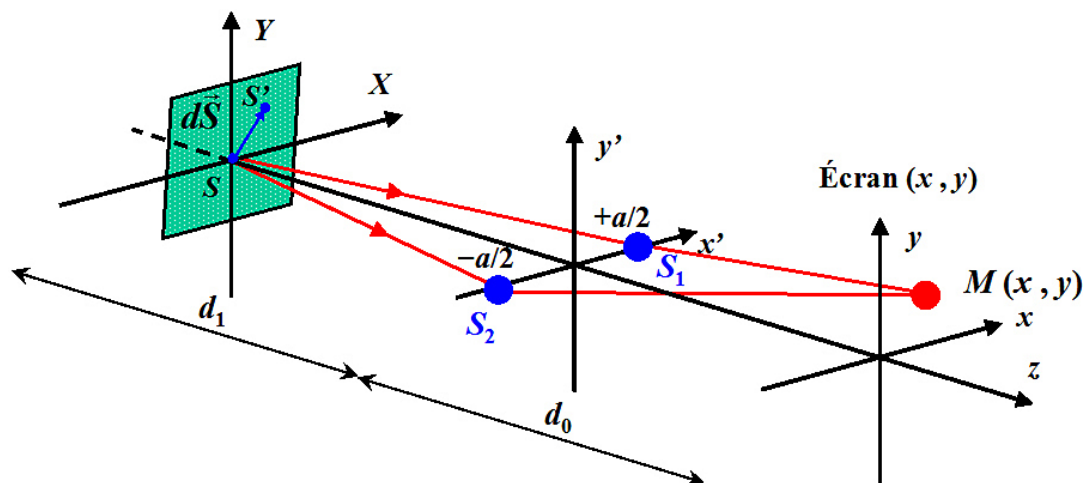


Figure 19 : Source étendue rectangulaire

La source circulaire a une luminance uniforme que l'on décrira par la fonction suivante :

$$L(X, Y) = \begin{cases} 1 & |X| \leq L_x/2 \text{ et } |Y| \leq L_y/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La transformée de Fourier de la répartition de luminance de la source est donnée par :

$$\tilde{L}(\sigma \alpha, \sigma \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(X, Y) \exp(-2i\pi(\sigma \alpha X + \sigma \beta Y)) dX dY$$

Compte tenu de la définition de la fonction luminance, nous avons :

$$\tilde{L}(\sigma \alpha, \sigma \beta) = \int_{-L_x/2}^{+L_x/2} \exp(-2i\pi\sigma \alpha X) dX \int_{-L_y/2}^{+L_y/2} \exp(-2i\pi\sigma \beta Y) dY$$

Cette expression s'intègre facilement et on trouve :

$$\tilde{L}(\sigma \alpha, \sigma \beta) = L_x L_y \operatorname{sinc}(\sigma L_x \alpha) \operatorname{sinc}(\sigma L_y \beta)$$

Puisque les sources secondaires sont réduites à deux points, $(\alpha, \beta) = (a/d_1, 0)$, nous avons :

$$\tilde{L}(\sigma \alpha, 0) = L_x L_y \operatorname{sinc}\left(\frac{a L_x}{\lambda d_1}\right)$$

Pour le cas illustré sur la figure 19, le degré de cohérence spatiale de la source de forme rectangulaire s'écrit finalement :

$$\gamma_{c,s} = \Re \left[\frac{\tilde{L}(\sigma\alpha, \sigma\beta)}{\tilde{L}(0,0)} \right] = \text{sinc} \left(\frac{a L_x}{\lambda d_1} \right)$$

Le degré de cohérence spatiale de la source rectangulaire est de la forme d'une fonction sinuscardinal. La figure 20 montre le profil du degré de cohérence spatiale de la source de forme rectangulaire en fonction de la valeur de Z exprimée en radians.

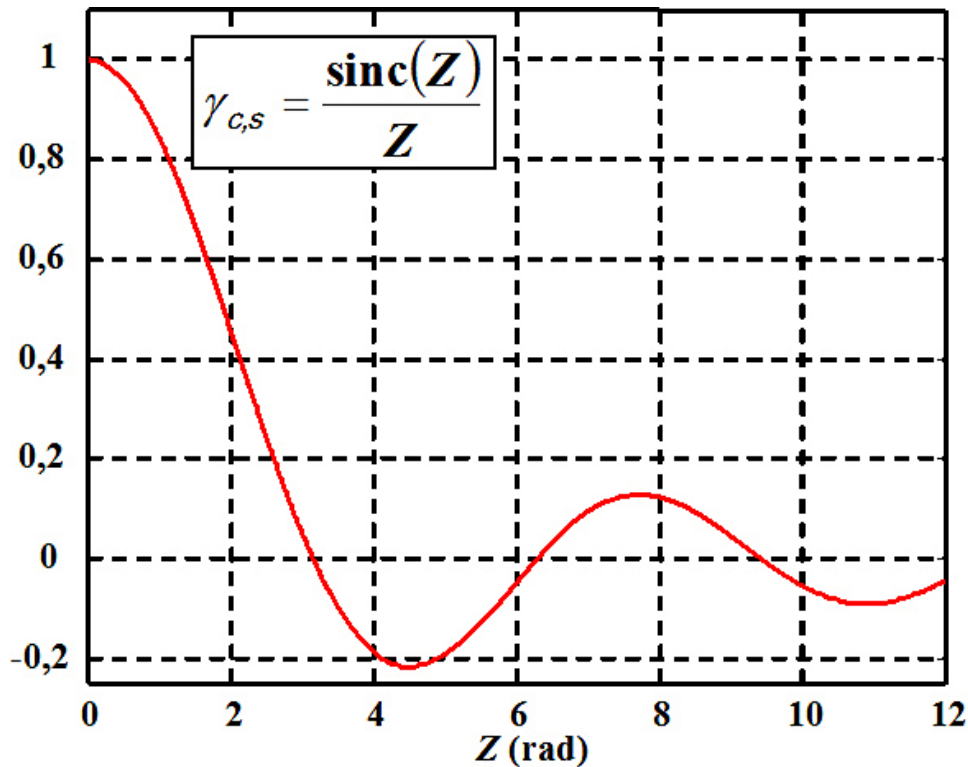


Figure 20 : Degré de cohérence de la source étendue rectangulaire

Les zéros du degré de cohérence sont équidistants. Le contraste s'annule pour :

$$\frac{\pi a L_x}{\lambda d_1} = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Le premier zéro est obtenu pour un écart entre les sources secondaires égal à :

$$a = \frac{\lambda d_1}{L_x}$$

Cette expression donne une estimation de la largeur de cohérence spatiale de la source.

* *

*

Ce cours a présenté le concept d'interférences à deux ondes qui fait intervenir la notion de différence de marche et de cohérence. Le lecteur retiendra que la cohérence temporelle est due à la largeur spectrale de la source tandis que la cohérence spatiale est liée à l'extension de la source. Une source monochromatique et ponctuelle est cohérente tant d'un point de vue temporel que spatial.

L'étude de cas abordera l'interféromètre des trous d'Young en lumière monochromatique et en lumière blanche.

La partie exercice s'attachera à tester vos connaissances sur les points essentiels de ce cours.

III. Etude de cas : interférences en lumière parfaitement cohérente

L'illustration et l'étude de cas du phénomène d'interférences à deux ondes sont abordés avec le montage expérimental des trous d'Young dans le cadre d'une source de cohérence temporelle et spatiale parfaite. Les résultats généraux trouvés resteront valables quel que soit le montage expérimental choisi. En particulier ces résultats seront réutilisés dans le cours « **Dispositifs interférentiels** ». Le dispositif est représenté schématiquement figure 21.

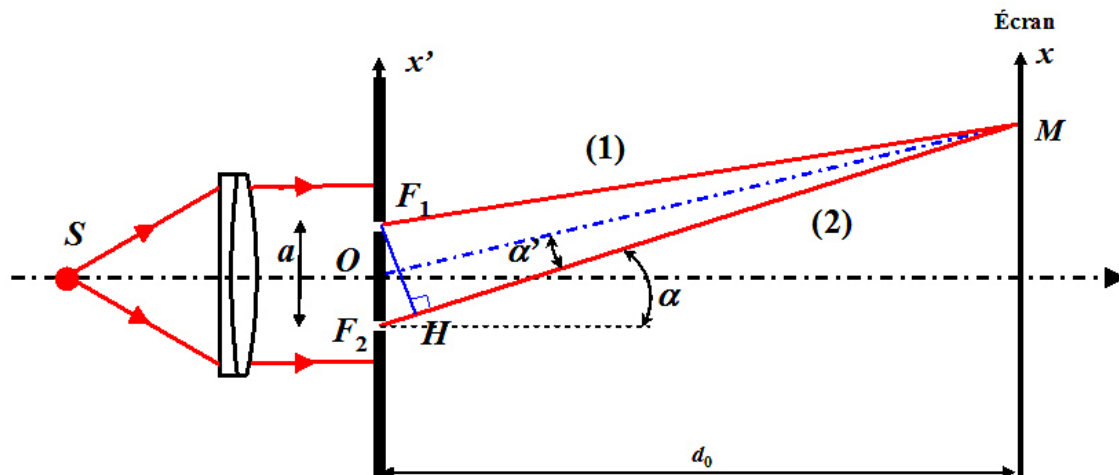


Figure 21 : Dispositif des trous d'Young

Une source ponctuelle S , donc cohérente spatialement, est placée au foyer d'une lentille, l'onde plane résultante éclaire une plaque opaque percée de deux trous identiques F_1 et F_2 très petits ($0,01\text{ mm}$ de diamètre par exemple), distants l'un de l'autre de la quantité a . La longueur d'onde de l'onde plane monochromatique est notée λ . En raison du phénomène de diffraction qui ne sera pas étudié dans ce cours, chaque trou F_1 et F_2 va se comporter comme une source éclairant largement un écran placé plus loin. Les radiations émises par F_1 et F_2 se recombinaient en un point M de l'écran après avoir parcouru deux chemins optiques (1) et (2) différents. Un point situé dans le plan des trous est repéré par ses coordonnées (x', y') . L'observation se fait sur l'écran E situé à une distance d_0 des trous d'Young. Cette distance est grande par rapport à la distance a ; un point M de l'écran est repéré par ses coordonnées (x, y) . Les deux ondes étant cohérentes temporellement, la répartition de l'intensité sur l'écran est donnée par la relation (voir paragraphe "Signal d'interférences" dans le cours) :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi \delta}{\lambda}\right)$$

Pour deux trous sources diffractant la lumière de façon identique, nous avons $I_1 = I_2 = I_0/2$ où I_0 est l'intensité de la source, le signal d'interférence s'écrit :

$$I = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi \delta}{\lambda}\right) \right) \quad (2)$$

La différence de chemin optique, notée δ , est due au fait que le chemin optique $[F_2M]$ est différent du chemin optique $[F_1M]$. Cette différence de chemin optique induit le déphasage φ donné par :

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

Cette relation totalement générale s'applique dans tous les cas où on a :

- une source ponctuelle (cohérence spatiale),
- une source monochromatique (cohérence temporelle),
- deux ondes qui interfèrent.

La distinction entre deux montages interférentiels à deux ondes n'intervient que dans l'expression de la différence de marche δ qui ne dépend que des paramètres géométriques du montage.

La répartition d'intensité $\frac{I}{I_0}(\delta)$ est une fonction cosinus de valeur moyenne 1/2 et de période λ . Elle est représentée sur la figure 22. Pour les points lumineux de l'écran, la différence de marche δ est égale à un nombre entier de fois la longueur d'onde : $\delta = k\lambda (k \in \mathbb{N})$. Pour les points sombres, la différence de marche δ est égale à un nombre entier impair de fois la demi-longueur d'onde : $\delta = (2k + 1)\lambda/2 (k \in \mathbb{N})$.

Le rapport $k = \delta/\lambda$ s'appelle l'**ordre d'interférences**. Tous les points de même ordre d'interférences sont dans le même état d'interférences, ils appartiennent à la même frange et ils ont donc le même éclaircissement.

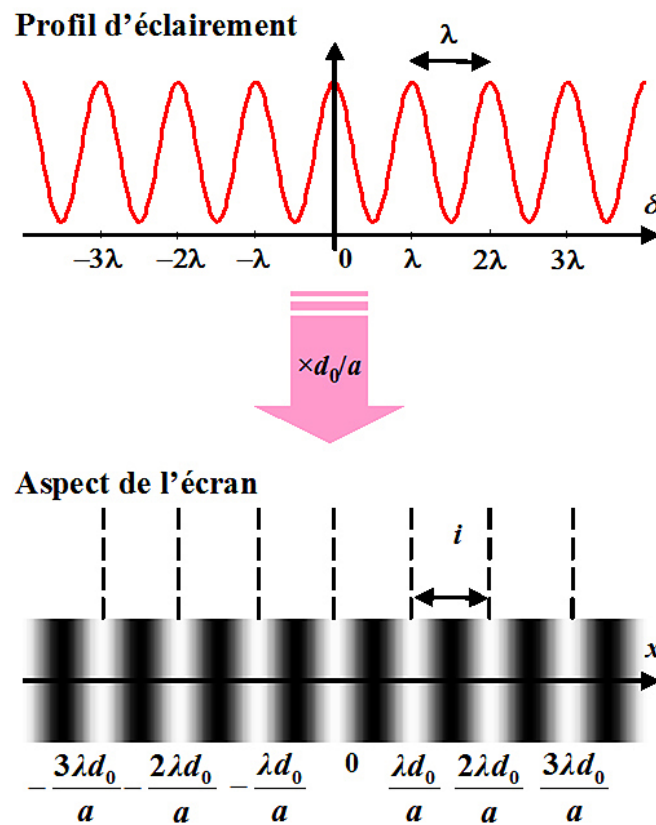


Figure 22 : Répartition de l'éclairement

1. Étude du dispositif des trous d'Young en lumière monochromatique

Dans ce paragraphe on s'intéresse à exprimer δ en fonction de l'abscisse x du point M d'observation, de l'écartement a des trous d'Young et de la distance d_0 des trous à l'écran d'observation. Dans ce montage, la distance d_0 de l'ordre du mètre est bien supérieure à la distance entre-axe a des trous de l'ordre du millimètre, il est possible de considérer que la distance F_1M est égale à la distance MH , ce qui revient à confondre la corde F_1H avec l'arc correspondant. Puisque l'indice de l'air est très voisin de 1, la différence de marche δ s'identifie à la longueur F_2H :

$$\delta = F_2H = a \sin \alpha$$

La distance d_0 est grande aussi devant x , les angles α et α' sont petits et peu différents l'un de l'autre d'où, si α est exprimé en radians :

$$\tan \alpha \approx \tan \alpha' = \frac{x}{d_0} \approx \sin \alpha \approx \alpha$$

soit en combinant les deux dernières équations :

$$\delta = \frac{a x}{d_0}$$

en remplaçant δ par son expression dans la relation (2), nous obtenons l'expression du signal d'interférences :

$$I = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2 \pi a x}{\lambda d_0} \right) \right)$$

La période spatiale sur l'écran, appelée **interfrange**, a pour expression :

$$i = \frac{\lambda d_0}{a}$$

Elle représente la distance sur l'écran entre deux franges brillantes ou deux franges sombres. Si la distance a entre les trous augmente, l'interfrange i diminue ; de même l'interfrange diminue avec la longueur d'onde.

Le site icj4 propose des animations qui illustrent ces influences.

Puisque a , d_0 , λ sont des constantes pour un montage donné, le lieu des points qui ont le même état d'interférence, qui ont donc le même ordre d'interférence, vérifie :

$$\frac{\delta}{\lambda} = k = C^{te} \rightarrow x = C^{te}$$

Le lieu de ces points est donc constitué d'un ensemble de plans parallèles d'abscisse constante. Sur l'écran, ces plans présentent des franges rectilignes parallèles entre elles (voir figure 23).

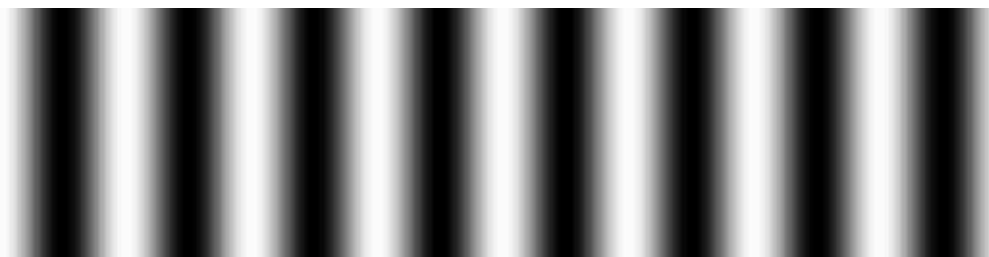


Figure 23 : Franges rectilignes sur l'écran

2. Cas de la lumière blanche

En lumière blanche, on peut considérer que chacune des longueurs d'onde du spectre visible constitue un système de franges qui se superposent. Tant que la différence de marche δ reste inférieure à la **longueur de cohérence** de la source, le champ apparaît sous forme de franges colorées (voir figure 24) appelées franges en lumière blanche, quand δ augmente les teintes palissent, on dit qu'elles sont délavées de blanc puis lorsque la différence de marche devient supérieure à la longueur de cohérence, le champ apparaît uniformément blanc. Cette teinte porte le nom de **blanc d'ordre supérieur**. Les franges ont disparu c'est à dire que la modulation en cosinus a été réduite par l'effet de la cohérence temporelle de la source. Pour une source blanche où $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ et $\Delta\lambda = 400 \text{ nm}$ (voir paragraphe "Cas d'une répartition spectrale rectangulaire" dans "**Cohérence temporelle- Illustrations**"), la longueur de

cohérence est donnée par $l_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = 0,9 \mu\text{m}$, ainsi dès que la différence de marche dépasse 1 micron, les franges disparaissent.

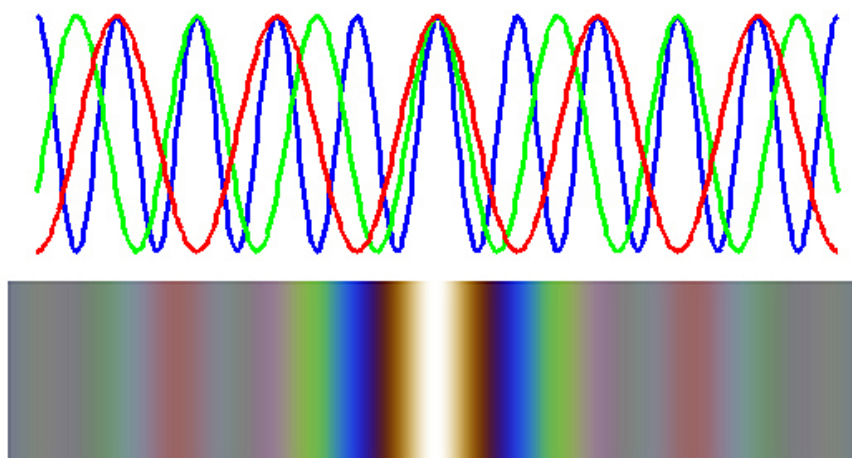


Figure 24 : Franges en lumière blanche

Remarque

Si on analyse le blanc d'ordre supérieur au spectroscopie, on constate que toutes les longueurs d'onde comprises entre 400 nm et 800 nm ne sont pas présentes, il en manque quelques unes, celles qui vérifient la relation $\delta = (2k + 1)\lambda/2$ ($k \in \mathbb{N}$) et qui sont donc « éteintes » par interférence destructive.

IV.Exercice auto correctif

1. Questions de cours

Indiquer les assertions vraies :

Question 1

[Solution n°1 p 45]

Plus la durée de vie d'un train d'onde est grande, plus la lumière est monochromatique.

Question 2

[Solution n°2 p 45]

Plus la durée de vie d'un train d'onde est grande, plus la fréquence est faible.

Question 3

[Solution n°3 p 45]

Plus la durée de vie d'un train d'onde est grande, plus la longueur de cohérence est importante.

Question 4

[Solution n°4 p 45]

Dans le vide, pour une onde électromagnétique le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct.

Question 5

[Solution n°5 p 45]

Un faisceau de lumière parallèle représente une onde plane.

Question 6

[Solution n°6 p 45]

Les rayons lumineux sont contenus dans les surfaces d'onde.

Question 7

[Solution n°7 p 45]

Le spectre d'une lumière quasi monochromatique est large.

Question 8

[Solution n°8 p 45]

La longueur de cohérence d'une source laser (à gaz) quasi monochromatique $\Delta\lambda \simeq 10^{-6}$ nm est grande, elle peut atteindre plusieurs mètres.

Question 9

[Solution n°9 p 45]

Une surface d'onde est le lieu des points où les vecteurs champs électriques vibrent en phase à 2π près.

Question 10

[Solution n°10 p 45]

Deux surfaces d'onde distantes de 2λ vibrent en phase à 4π près.

Question 11

[Solution n°11 p 46]

Deux ondes polarisées rectilignement dont leur direction de polarisation fait un angle de 90° entre eux peuvent interférer.

Question 12

[Solution n°12 p 46]

Deux ondes polarisées rectilignement dont leur direction de polarisation fait un angle de 45° entre eux peuvent interférer.

Question 13

[Solution n°13 p 46]

Le contraste des franges d'interférences est maximum lorsque les deux sources sont de même intensité.

2. Enoncé

Dans l'expérience des fentes d'Young, les fentes sont espacées de $a = 0,2 \text{ mm}$ et l'écran est placé à $d_0 = 1,5 \text{ m}$. La distance entre les cinquième minima situés de part et d'autre de la frange d'ordre 0 est égale à $34,73 \text{ mm}$.

Question

[Solution n°14 p 46]

Déterminer la longueur d'onde de la source utilisée.

3. Enoncé

Une source de lumière blanche ($400 - 700 \text{ nm}$) éclaire des fentes d'Young espacées de $1,25 \text{ mm}$. Une figure d'interférences est observée sur un écran situé à $1,5 \text{ m}$. Si une fente source d'un spectroscope à haute résolution est placée au niveau de l'écran à 3 mm de la frange centrale blanche (et parallèlement aux franges d'interférences) on observe des cannelures sombres.

Question 1

[Solution n°15 p 46]

Au point **M** d'observation observe-t-on des interférences ? Justifier.

Question 2

[Solution n°16 p 47]

A quelles longueurs d'onde correspondent ces cannelures ?

4. Enoncé

On considère deux fentes F_1 et F_2 , infiniment fines, verticales, percées dans un écran opaque, distantes de $a = 2 \text{ mm}$. On les éclaire par une source ponctuelle **S**, monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$. La source **S** est située à égale distance de F_1 et F_2 . On observe la figure d'interférences sur un écran **E** parallèle au plan des fentes situé à $d_0 = 1 \text{ m}$ de celles-ci.

Question 1

[Solution n°17 p 47]

Donner l'éclairement au niveau de plan **E**. Déterminer l'interfrange et le contraste.

Question 2

[Solution n°18 p 48]

Comment est modifié le résultat précédent si S est remplacée par une fente F_0 verticale, infiniment fine et parallèle à F_1 et F_2 ?

Question 3

[Solution n°19 p 48]

Qu'observe-t-on si on introduit un déphasage φ_0 constant sur un des trajets? En F_1 on interpose une lame de verre très mince à faces parallèles, d'indice $n = 1,5$. Lors de l'introduction de cette lame, sur l'écran E , l'ensemble des franges se translate d'une quantité $t = 2,9 \text{ mm}$.

1. Quelle est la direction de cette translation ?
2. A combien de franges cela correspond-il ?
3. En déduire l'épaisseur e de la lame de verre.

Question 4

[Solution n°20 p 49]

On remplace la lame par un écran absorbant de densité optique 2 ($DO = 2$). Déterminer le nouveau contraste.

Question 5

[Solution n°21 p 49]

On enlève le filtre de densité et on utilise maintenant une source spatialement incohérente. Décrire le phénomène observé si la source est polychromatique (lumière blanche).

Question 6

[Solution n°22 p 49]

La source est située à $d_1 = 100 \text{ mm}$ de F_1 et F_2 et a une largeur $e = 6,8 \mu\text{m}$. Que devient l'éclairement en un point M du plan E ? Comment varie la visibilité avec e ?

Question 7

[Solution n°23 p 50]

On utilise comme source une grille constituée de fentes parallèles à F_1 et F_2 . Déterminer le pas de la grille et la largeur des fentes pour que le contraste conserve la valeur précédente.

Question 8

[Solution n°24 p 51]

La source est de nouveau une fente réduite à F_0 mais la source de lumière monochromatique est remplacée par une source à vapeur de sodium dont le spectre est essentiellement constitué de deux radiations de longueur d'onde $\lambda_1 = 589,3 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,9 \text{ nm}$.

Trouver l'expression de la fonction densité spectrale d'énergie $S_S(\sigma)$ en fonction du nombre d'onde moyen $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ et de l'écart du doublet $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$.

Trouver l'expression de l'éclairement normalisé de l'écran E .

Question 9

[Solution n°25 p 51]

Représenter soigneusement la fonction précédente.

Question 10

[Solution n°26 p 52]

Quel est la valeur de l'interfrange ?

Question 11

[Solution n°27 p 52]

Pour quelles valeurs de la différence de marche y a-t-il annulation du contraste ?

Question 12

[Solution n°28 p 52]

La source émet maintenant une raie spectrale dont la fonction densité spectrale d'énergie peut être décrite par :

$$S_s(\sigma) = I_0 \exp\left(-\kappa \frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{\Delta\sigma^2}\right)$$

où $\kappa = -4 \ln 2$, σ_0 est le nombre d'onde moyen et $\Delta\sigma$ est la largeur à mi-hauteur de la raie. La raie est centrée sur la longueur d'onde $\lambda_0 = 546,1 \text{ nm}$ et a une largeur spectrale $\Delta\lambda = 50 \text{ nm}$.

Quel est la valeur de $\Delta\sigma$?

Question 13

[Solution n°29 p 52]

Trouver l'expression de l'éclairement normalisé de l'écran E.

Calculer la longueur de cohérence de la source.

Question 14

[Solution n°30 p 53]

Représenter graphiquement et soigneusement l'éclairement normalisé.

Question 15

[Solution n°31 p 54]

Quel est la valeur de l'interfrange ?

Question 16

[Solution n°32 p 54]

Reprendre les questions précédentes dans le cas du doublet du sodium quand on prend en compte la nature physique de chaque raie ; c'est à dire que chaque raie est décrite par une enveloppe gaussienne. Prendre $\Delta\lambda_0 \approx 0,002 \text{ nm}$ pour la largeur de chaque raie, ce qui correspond à 300K à l'élargissement inhomogène par effet Doppler, et $\Delta\lambda = 0,6 \text{ nm}$ pour l'écart entre les deux raies.

Quel sont les valeurs de $\Delta\sigma_0$ et $\Delta\sigma$?

Question 17

[Solution n°33 p 54]

Reprendre le calcul de l'éclairement normalisé quand on considère que chacun des doublets du sodium peut être décrit par une fonction Gaussienne.

Représenter graphiquement le spectre de la source et l'interférogramme obtenu.

V.test equation latex

Equation éditée en LaTeX

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\forall f \in C^\infty \left(\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2} \right] \right), \forall t \in \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2} \right], f(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi \frac{k}{T} t} \times \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-2i\pi \frac{k}{T} t} dt}_{u_k = \hat{f}\left(\frac{k}{T}\right)}$$

Equation au format OpenOffice originel

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi \delta}{\lambda}\right)$$

$$y_{c,s} = \Re \left[\frac{\tilde{L}(\sigma_0 \alpha, 0)}{\tilde{L}(0, 0)} \right] = \text{sinc} \left(\frac{ea}{\lambda_0 d_1} \right) = \text{sinc} \left(\frac{2 \times 6,8 \times 10^{-3}}{0,555 \times 10^{-3} \times 100} \right) = 0,9$$

Solution des exercices

>Solution n°1 (exercice p. 40)

Vrai.

>Solution n°2 (exercice p. 40)

Faux, il n'y a aucun lien. Par contre plus la durée de vie est grande, plus la source est monochromatique et plus le spectre est étroit.

>Solution n°3 (exercice p. 40)

Vrai car $l_c = c\tau_c$

>Solution n°4 (exercice p. 40)

Dans le vide $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$, forme un trièdre direct; c'est donc vrai pour $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ et $(\vec{B}, \vec{k}, \vec{E})$.

>Solution n°5 (exercice p. 40)

Vrai, d'après le théorème de Malus, les rayons qui matérialisent la trajectoire de l'énergie sont perpendiculaires aux surfaces d'onde.

>Solution n°6 (exercice p. 40)

Faux, les rayons sont perpendiculaires aux surfaces d'onde.

>Solution n°7 (exercice p. 40)

Faux, c'est une raie spectrale étroite.

>Solution n°8 (exercice p. 40)

Vrai, dans ce cas si on prend $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ (laser HeNe) et un modèle de raie lorentzienne, l'ordre de grandeur est $l_c = 0,318\lambda^2/\Delta\lambda = 0,318 \times 633^2/10^{-6} \approx 127 \text{ m}$

>Solution n°9 (exercice p. 40)

Faux, une surface d'onde est le lieu des points où les vecteurs champs électriques vibrent strictement en phase. Des vecteurs vibrant en phase à 2π près appartiennent à 2 surfaces d'onde différentes distantes de λ .

>Solution n°10 (exercice p. 40)

Vrai pour la même raison que précédemment.

>Solution n°11 (exercice p. 40)

Non car deux ondes polarisées perpendiculairement n'interfèrent pas.

>Solution n°12 (exercice p. 41)

Oui, mais l'intensité moyenne de la figure d'interférence est plus faible que si les polarisations étaient parallèles.

>Solution n°13 (exercice p. 41)

Vrai, pour que le contraste soit maximum les amplitudes complexes associées à chacune des sources doivent être égales.

>Solution n°14 (exercice p. 41)

Entre les cinquième minima situés de part et d'autre de la frange d'ordre 0 sont situés les maxima lumineux correspondants aux ordres $k = \{-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$. On peut décompter sur l'écran 9 interfranges.

En posant $\Delta x = 34,73 \text{ mm}$, on peut écrire la relation :

$$\Delta x = 9i = 9 \frac{\lambda d_0}{a}$$

d'où :

$$\lambda = \frac{0,2 \times 34,73}{9 \times 1500} = 514 \times 10^{-4} \text{ mm} = 514 \text{ nm}$$

>Solution n°15 (exercice p. 41)

Au point M la différence de marche δ a pour valeur :

$$\delta = \frac{a x}{d_0} = \frac{1,25 \times 3}{1500} = 2,5 \mu \text{ m}$$

La longueur de cohérence relative à la source blanche utilisée (modèle de source uniforme) a pour ordre de grandeur ($\lambda_0 = 550 \text{ nm}$, $\delta\lambda = 300 \text{ nm}$):

$$l_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{(550 \times 10^{-9})^2}{300 \times 10^{-9}} \approx 1 \mu \text{ m}$$

La différence de marche excède la longueur de cohérence par conséquent le phénomène d'interférences n'est plus observable. Le point M est situé dans le blanc d'ordre supérieur. Observé avec un spectroscope, on peut voir qu'il manque quelques longueurs d'onde.

>Solution n°16 (exercice p. 41)

Les raies sombres du spectre cannelé correspondent à des interférences destructives, c'est à dire à un nombre impair de fois la demi de longueur d'onde. Il faut donc calculer les ordres d'interférences vérifiant $\delta = (2k + 1)\lambda/2$.

Ils sont compris entre les deux ordres extrêmes, k_B et k_R correspondant aux deux extrémités du spectre. Pour l'intervalle de longueur d'onde compris entre $\lambda_B = 400 \text{ nm}$ et $\lambda_R = 700 \text{ nm}$, les valeurs extrêmes des ordres d'interférences sont :

$$k_B = \frac{ax}{\lambda_B d_0} - \frac{1}{2} = \frac{1,25 \times 3}{0,4 \times 10^{-3} \times 1500} - \frac{1}{2} = 2,5,4 - \frac{1}{2} = 5,75$$

et

$$k_R = \frac{ax}{\lambda_R d_0} - \frac{1}{2} = \frac{1,25 \times 3}{0,7 \times 10^{-3} \times 1500} - \frac{1}{2} = 2,5,7 - \frac{1}{2} = 3,07$$

Les ordres d'interférence n'étant pas des nombres entiers, il n'y a que deux raies noires dans le spectre correspondant aux ordres $k_1 = 4$ et $k_2 = 5$, donc aux longueurs d'onde :

$$\lambda_1 = \frac{2\delta}{2k_1 + 1} = \frac{2 \times 2,5}{9} = 0,5556 \mu\text{m} = 555,6 \text{ nm}$$

et

$$\lambda_2 = \frac{2\delta}{2k_2 + 1} = \frac{2 \times 2,5}{11} = 0,4545 \mu\text{m} = 454,5 \text{ nm}$$

>Solution n°17 (exercice p. 41)

Le schéma du montage et des notations utilisées est représenté figure 25.

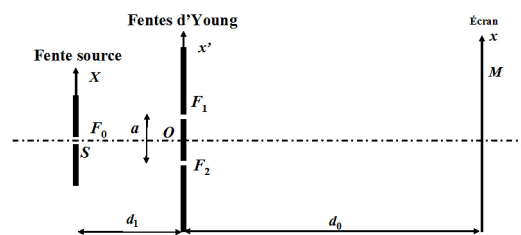


Figure 25 : Schéma du montage

On est dans le cas d'un interféromètre à deux ondes, en lumière parfaitement cohérente puisque la source est ponctuelle et monochromatique, la répartition d'éclairement est de la forme :

$$I = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right)$$

Dans le cas des fentes d'Young, l'interfrange a pour expression :

$$i = \frac{\lambda d_0}{a} = \frac{550 \times 10^{-9} \times 1}{2 \times 10^{-3}} = 0,275 \text{ mm}$$

La source étant parfaitement cohérente, le contraste est maximum et égale à 1.

>Solution n°18 (exercice p. 42)

Si la source S est remplacée par une fente verticale infiniment fine, les différents points sources sont incohérents entre eux, on est dans un cas de lumière partiellement cohérente spatialement, la variation de la différence de marche pour un point M de l'écran est donnée par la relation du paragraphe "Évaluation de la différence de marche" du cours :

$$\delta(S') = \delta_0 + \frac{1}{d_1} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot d\vec{S}$$

Ici les vecteurs $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \overrightarrow{F_2 F_1}$ et $d\vec{S}$ sont orthogonaux (figure 26)

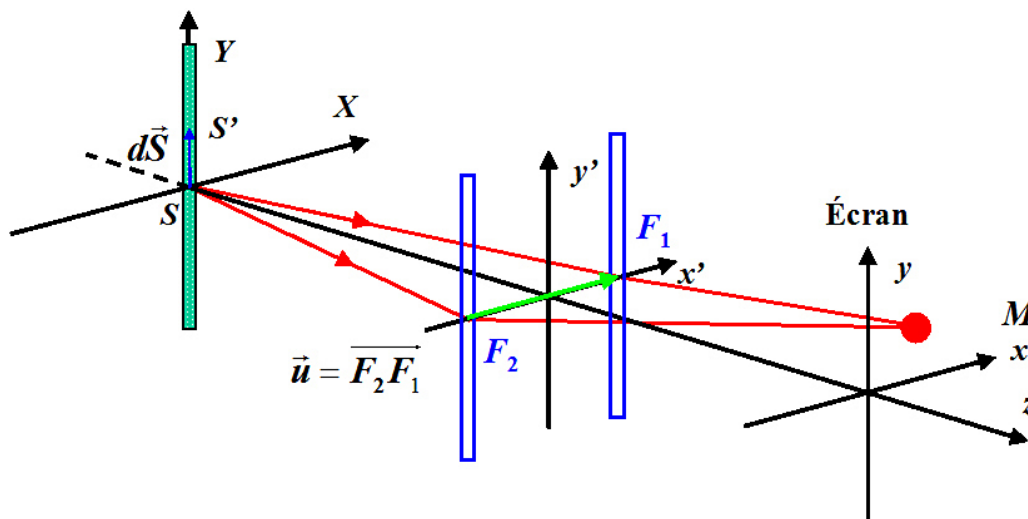


Figure 26 : Source avec fente fine verticale

Par conséquent $(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot d\vec{S} = 0$ et le degré de cohérence est égal à 1, il n'y a aucune diminution du contraste.

>Solution n°19 (exercice p. 42)

Une frange donnée correspond à une différence de marche δ donnée. Si on interpose une lame de verre en F_1 sur le trajet (1) le chemin optique augmente puisque l'indice de la lame est supérieur à l'indice de l'air. Pour compenser cet écart, le chemin géométrique du trajet (2) doit augmenter afin que la différence de marche conserve la même valeur.

1. Les franges défilent donc du côté où la lame a été insérée.
2. Le déplacement de $2,9 \text{ mm}$ correspond à un défilement de franges de :

$$k = \frac{t}{i} = \frac{2,9}{0,275} = 10,54$$
 puisqu'une période spatiale correspond à un interfrange.
3. Lors de l'interposition de la lame de verre, la différence de marche varie car sur une épaisseur e l'air d'indice 1 a été remplacé par l'indice n du verre. La variation est alors :

$$\Delta\delta = (n - 1)e$$

Le passage d'une frange à la suivante de même nature (sombre ou brillante), correspond à une variation de la différence de marche de λ , d'où :

$$e = \frac{k\lambda}{n-1} = \frac{10,54 \times 0,550}{1,5-1} = 11,6 \mu\text{m}$$

>Solution n°20 (exercice p. 42)

Les deux fentes sources n'ont plus la même intensité, il faut repartir de la relation de cours :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$$

Le rapport entre les deux intensités vérifie :

$$\text{DO} = -\log_{10}\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$$

d'où :

$$I_2 = 100 I_1$$

soit :

$$I = I_1 \left[101 + 20 \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right]$$

ce qui donne un contraste de :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{121 - 81}{121 + 81} = 0,2$$

>Solution n°21 (exercice p. 42)

Dans le cas d'une source de lumière blanche, on se retrouve dans le cas décrit dans l'étude de cas au paragraphe "Cas de la lumière blanche".

>Solution n°22 (exercice p. 42)

Les sources sont de nouveau de même intensité mais maintenant la source n'est plus cohérente spatialement puisqu'elle possède une largeur e . Le schéma du montage et des notations utilisées est représenté figure 27.

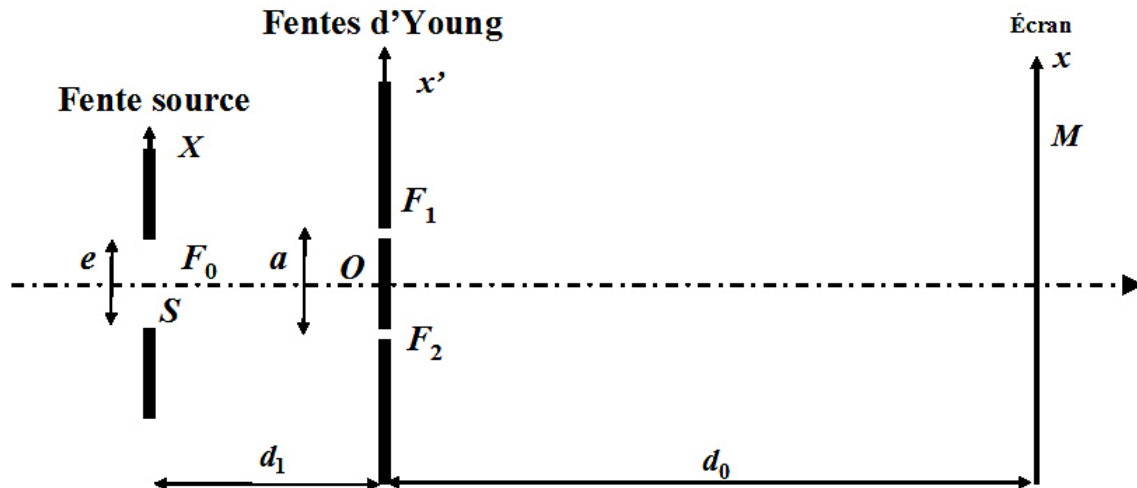


Figure 27 : Schéma du montage avec source étendue

Les franges d'interférences sont moins contrastées. La répartition d'intensité sur l'écran est donnée par :

$$I = \frac{I_0}{2} \left(1 + \Re \left[\frac{\tilde{L}(\sigma_0 \alpha, \sigma_0 \beta)}{\tilde{L}(0,0)} \right] \cos(2\pi \sigma_0 \delta_0) \right)$$

\tilde{L} représentant la transformée de Fourier de la fonction luminance de la source

La répartition spatiale de luminance de la source peut être décrite par une fonction rectangle de largeur e :

$$L(X, Y) = \Pi_e(X)$$

dont la transformée de Fourier est :

$$\tilde{L}(\sigma_0 \alpha, 0) = e \operatorname{sinc}(e \sigma_0 \alpha)$$

où σ_0 est le nombre d'onde de la source et $\alpha = a/d_1$ est l'angle sous lequel sont vues les fentes depuis le centre de la source.

En conséquence le degré de cohérence spatiale vaut :

$$\gamma_{c,s} = \Re \left[\frac{\tilde{L}(\sigma_0 \alpha, 0)}{\tilde{L}(0,0)} \right] = \operatorname{sinc} \left(\frac{ea}{\lambda_0 d_1} \right) = \operatorname{sinc} \left(\frac{2 \times 6,8 \times 10^{-3}}{0,555 \times 10^{-3} \times 100} \right) = 0,9$$

>Solution n°23 (exercice p. 42)

Dans un premier temps on considère une seule fente source mais décalée dans son plan (X, Y) d'une quantité P suivant l'axe des X . Pour le point M de l'écran la différence de marche a varié d'une quantité $\Delta\delta = ap/d_1$. Le calcul est analogue à celui fait dans l'Etude de Cas au paragraphe 6.1. Si cette variation de différence de marche est égale à $k\lambda$ alors la figure d'interférence est identique à la précédente. La figure est translatée de une interfrange vers le bas. Une frange lumineuse (respectivement noire) a remplacé la frange lumineuse (resp. noire) suivante.

Par conséquent la fente source unique peut être remplacée par un réseau de pas :

$$p = \frac{\lambda d_1}{a} = \frac{0,550 \times 100}{2} = 27,5 \mu\text{m}$$

>Solution n°24 (exercice p. 42)

La source est maintenant cohérente spatialement mais partiellement incohérente temporellement.

D'après le paragraphe "*Illustrations*" dans la partie du cours "**Cohérence temporelle**", la densité spectrale d'énergie s'exprime sous la forme :

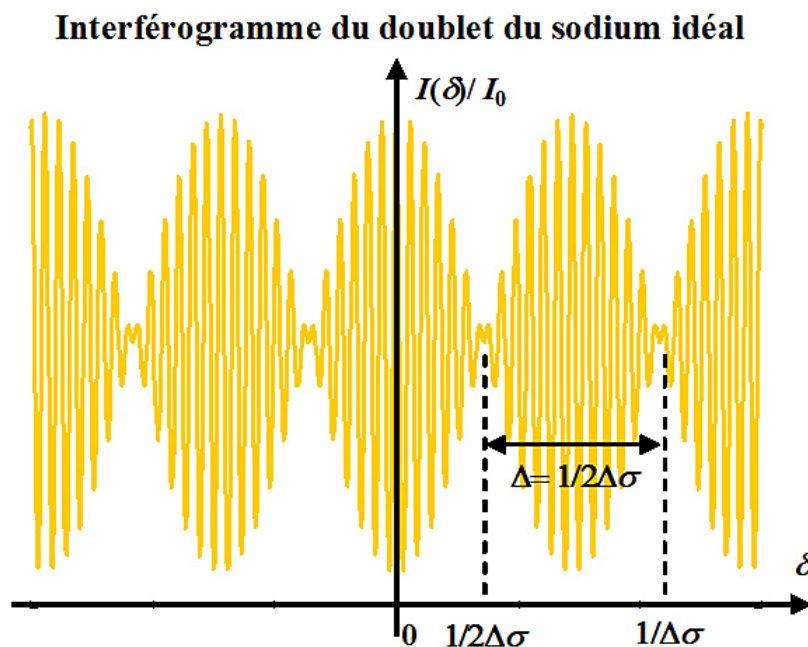
$$S_s(\sigma) = I_0 \delta\left(\sigma - \sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}\right) + I_0 \delta\left(\sigma - \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}\right)$$

et nous avons (voir paragraphe "*Illustrations*") :

$$I(\delta) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos(\pi \Delta\sigma \delta) \cos(2\pi \sigma_0 \delta) \right]$$

>Solution n°25 (exercice p. 42)

Représentation de la répartition d'intensité sur l'écran : l'interférogramme présente des battements et a une forme similaire à celui représenté sur la figure 28.



>Solution n°26 (exercice p. 42)

L'interférogramme du doublet s'écrit également :

$$I(\delta) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos(\pi \Delta \sigma \delta) \cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda_0}\right) \right]$$

L'interfrange est donc donnée par :

$$i = \frac{\lambda_0 d_0}{a}$$

avec $\lambda_0 = 1/\sigma_0 = 2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2) = 589,3 \text{ nm}$.

On a donc :

$$i = \frac{0,5893 \times 10^{-3} \times 1000}{2} = 0,294 \text{ mm}$$

>Solution n°27 (exercice p. 42)

La fonction contraste $\gamma_{c,t} = \cos(\pi \Delta \sigma \delta)$ s'annule quand l'argument de la fonction cosinus est égale à $\pi/2 + k\pi$, soit :

$$\delta = \frac{1}{2\Delta\sigma} + \frac{k}{\Delta\sigma}$$

>Solution n°28 (exercice p. 43)

La démarche est la même que précédemment.

La valeur de $\Delta\sigma$ est donnée par :

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{50 \times 10^{-9}}{(546,1 \times 10^{-9})^2} = 1,676 \times 10^3 \text{ cm}^{-1}$$

>Solution n°29 (exercice p. 43)

La densité spectrale d'énergie est :

$$S_s(\sigma) = I_0 \exp\left(-\kappa \frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{\Delta\sigma^2}\right)$$

L'enveloppe spectrale est donc :

$$S_0(\sigma) = I_0 \exp\left(-\kappa \frac{\sigma^2}{\Delta \sigma^2}\right)$$

La transformée de Fourier de $S_0(\sigma)$ est :

$$\tilde{S}_0(\delta) = \frac{\sqrt{\pi} \Delta \sigma^2}{\sqrt{\kappa}} I_0 \exp\left(-\left(\frac{\pi \Delta \sigma \delta}{\sqrt{\kappa}}\right)^2\right)$$

Le degré de cohérence est :

$$\gamma_{c,t}(\delta) = \Re \left[\frac{\tilde{S}_0(\delta)}{\tilde{S}_0(0)} \right] = \exp\left(-\frac{1}{\kappa} \pi^2 \Delta \sigma^2 \delta^2\right)$$

Le signal d'interférence s'exprime par :

$$\frac{I(\delta)}{I_0} = \frac{1}{2} \left[1 + \exp\left(-\frac{1}{\kappa} \pi^2 \Delta \sigma^2 \delta^2\right) \cos(2\pi \sigma_0 \delta) \right]$$

La longueur de cohérence de la source est calculée par l'expression

$$l_c = \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_{c,t}(\delta)|^2 d\delta$$

soit :

$$l_c = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\kappa} \pi^2 \Delta \sigma^2 \delta^2\right) d\delta$$

Compte tenu que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$$

le calcul donne :

$$l_c = \frac{0,664}{\Delta \sigma} = 0,664 \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$$

L'application numérique conduit à :

$$l_c = \frac{0,664}{1,6766 \times 10^3} = 3,96 \times 10^{-4} \text{ cm} = 3,96 \mu\text{m}$$

>Solution n°30 (exercice p. 43)

L'éclairement normalisé a pour valeur moyenne $1/2$. Il est représenté sur la figure 29.

Interférogramme de la source gaussienne

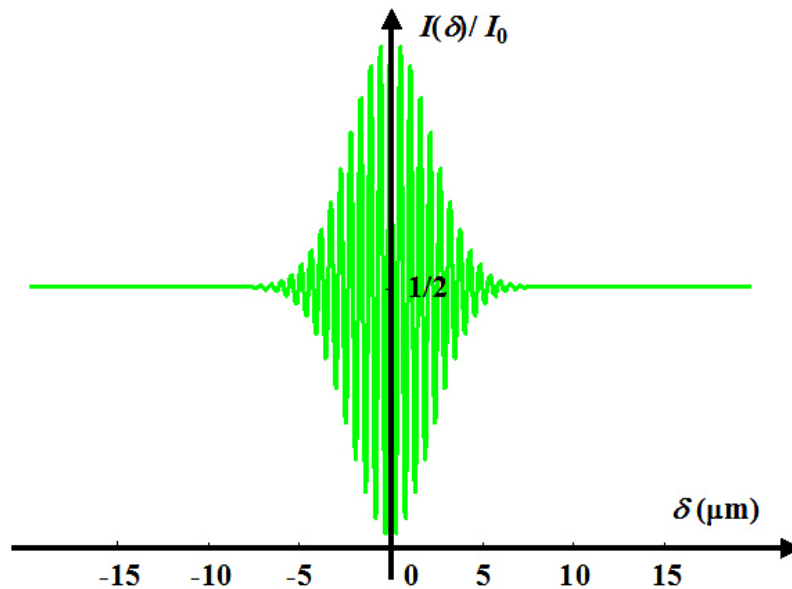


Figure 29 : Interférogramme obtenu avec une source à densité énergétique gaussienne

>Solution n°31 (exercice p. 43)

La fonction cosinus a toujours la même période $1/\sigma_0 = \lambda_0$, le montage géométrique n'a pas changé par conséquent la période sur l'écran et donc l'interfrange reste toujours le même.

>Solution n°32 (exercice p. 43)

La valeur de $\Delta\sigma_0$ est donnée par :

$$\Delta\sigma_0 = \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda^2} = \frac{0,005 \times 10^{-7}}{(589,3 \times 10^{-7})^2} = 0,057 \text{ cm}^{-1}$$

et celle de $\Delta\sigma$ est donnée par :

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{0,6 \times 10^{-7}}{(589,3 \times 10^{-7})^2} = 17,277 \text{ cm}^{-1}$$

>Solution n°33 (exercice p. 43)

Quand chacun des doublets du sodium peut être décrit par une fonction Gaussienne, on se rapproche du cas réel. La fonction densité spectrale d'énergie s'écrit sous la forme :

$$S_s(\sigma) = I_0 \exp\left(-\kappa \frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{\Delta\sigma_0^2}\right) * \left[\delta\left(\sigma - \left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}\right)\right) + \delta\left(\sigma - \left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}\right)\right) \right]$$

La démarche reste identique à la précédente. On calcule la transformée de Fourier de la densité spectrale. Cette dernière est égale au produit des transformées de Fourier de chacune des deux fonctions convolutives.

Ces transformées de Fourier ont déjà été calculées précédemment.

Les deux distributions de Dirac convoluées à la fonction gaussienne s'écrivent :

$$f(\sigma) = \delta\left(\sigma - \sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}\right) + \delta\left(\sigma - \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}\right)$$

et leur transformée de Fourier est :

$$\tilde{f}(\delta) = \cos(\pi \Delta \sigma \delta)$$

On en déduit l'expression de l'interférogramme normalisé :

$$\frac{I(\delta)}{I_0} = \frac{1}{2} \left[1 + \exp\left(-\frac{1}{K} \pi^2 \Delta \sigma_0^2 \delta^2\right) \cos(\pi \Delta \sigma \delta) \cos(2\pi \sigma_0 \delta) \right]$$

La répartition d'intensité en fonction de la différence de marche sont représentées sur la figure 30.

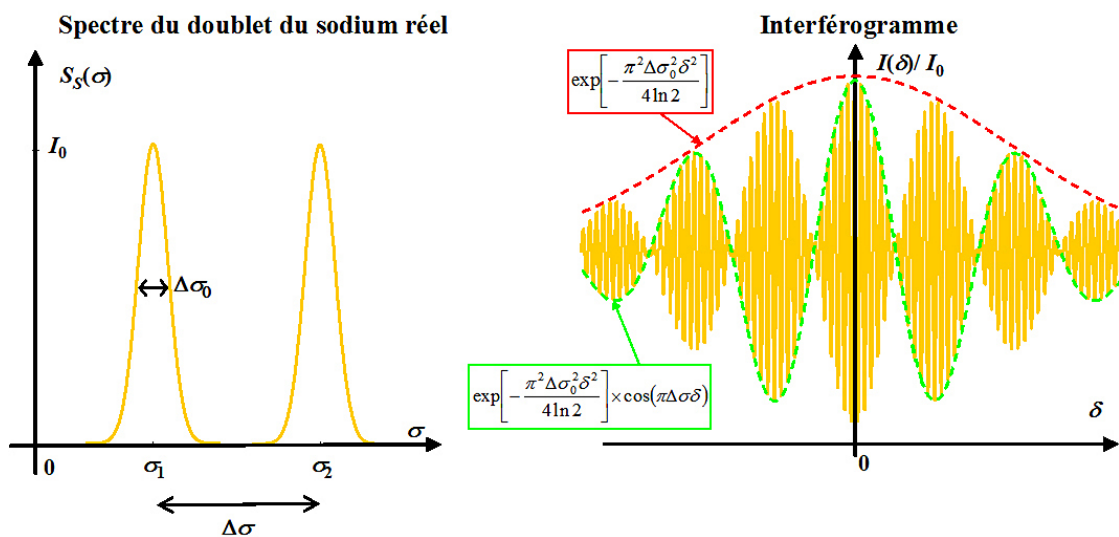


Figure 30 : Interférogramme obtenu pour le doublet du sodium réel

Bibliographie

[[1]] JOSEPH W. GOODMAN, *Introduction to Fourier Optics*, Éditions McGraw-Hill, New York, 1996.

[[2]] JOSEPH W. GOODMAN, *Statistical Optics*, Editions Wiley&Sons, New York, 2000.

[[3]] P. HARIHARAN, *Basic of Interferometry*, Academic Press, San Diego California, 1991.

[[4]] JOËLLE SURREL, *Optique Instrumentale et Optique de Fourier*, Éditions Ellipse, Paris, 1996.

Crédit des ressources

Figure 1 : Géométrie en coordonnées cartésiennes *p. 7*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 2 : Signal d'interférences *p. 11*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 3 : Interférences de deux ondes planes, géométrie *p. 11*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 5 : Interférences de deux ondes sphériques, géométrie dans le plan de coupe
p. 13

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 6 : Structure du champ d'interférences avec des ondes sphériques *p. 14*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 7 : Géométrie symétrique *p. 15*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 8 : Représentation spectrale de la source *p. 16*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 9 : Spectre et interférogramme d'une source monochromatique (cas $a=b$) *p. 19*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 10 : Spectre et interférogramme d'un doublet *p. 20*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 11 : Spectre et interférogramme d'une source à spectre uniforme *p. 21*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 12 : Spectre et interférogramme d'une émission monomode lorentzienne *p. 23*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 14 : Les deux types d'interféromètres *p. 26*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 15 : Pour une source de dimension donnée le contraste des franges est constant *p. 28*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 16 : Source étendue circulaire *p. 29*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 17 : Degré de cohérence de la source étendue circulaire *p. 31*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 18 : Degré de cohérence de la source étendue circulaire *p. 32*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 21 : Dispositif des trous d'Young *p. 36*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 22 : Répartition de l'éclairement *p. 37*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 23 : Franges rectilignes sur l'écran *p. 39*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 24 : Franges en lumière blanche *p. 39*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 25 : Schéma du montage *p. 47*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 26 : Source avec fente fine verticale *p. 48*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 27 : Schéma du montage avec source étendue *p. 50*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 28 : Interférogramme du doublet du sodium *p. 51*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 29 : Interférogramme obtenu avec une source à densité énergétique gaussienne *p. 54*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 30 : Interférogramme obtenu pour le doublet du sodium réel *p. 55*

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>