

Interférométrie et démodulation de franges

PASCAL PICART

Table des matières

I. Présentation	3
II. Cours	4
1. Principe de démodulation de phase.....	6
1.1. Classification des techniques de démodulation de phase.....	6
1.2. Ambiguïté sur le signe de la phase.....	7
1.3. Nécessité d'un déroulement de phase.....	8
2. Démodulation de phase sans porteuse spatiale.....	13
2.1. Décalage de phase temporel.....	13
2.2. Décalage de phase par marche.....	16
2.3. Généralisation.....	19
2.4. Algorithmes génériques.....	20
2.5. Modulation de phase sinusoïdale.....	23
2.6. Techniques de décalage de phase.....	25
2.7. Illustrations.....	27
3. Démodulation de phase avec porteuse spatiale.....	31
3.1. Démodulation par transformée de Fourier.....	31
3.2. Décalage de phase à porteuse spatiale.....	34
3.3. Démodulation synchrone spatiale.....	36
3.4. Illustrations.....	37
3.5. Techniques de modulation spatiale de phase.....	41
III. Etude de cas	42
1. Dispositif expérimental.....	42
2. Principe de mesure.....	44
3. Franges de corrélation.....	45
4. Démodulation de phase.....	46
IV. Exercice	52
1. Calcul des erreurs systématiques.....	52
2. Calcul des erreurs aléatoires.....	53
3. Exercice auto-correctif.....	53
Solution des exercices	55
Bibliographie	59

I.Présentation

Module :

Interférences et Diffraction

Auteur(s) :

Pascal Picart¹ - ENSIM – Le Mans Université

Résumé :

Présentation des techniques d'extraction de la phase optique d'un signal d'interférences.

Mots-clés :

Interférence, Phase optique, Décalage de phase, Modulation de phase, Interférométrie

Pré-requis :

optique physique , traitement du signal, incertitude

Objectif(s) pédagogique(s) :

Comprendre les méthodes de traitement

Mettre en œuvre les techniques d'extraction de la phase optique d'un signal de références

Plan du cours :

- Introduction
- Principe de démodulation de phase
- Démodulation de phase sans porteuse spatiale
- Démodulation de phase avec porteuse spatiale

Conception & production :

PRN - Le Mans Université

Licence :

Licence GNU²

1 - pascal.picart@univ-lemans.fr

2 - <http://www.gnu.org/licenses/fdl.txt>

II. Cours

Un grand nombre de techniques de mesures optiques reposent sur le phénomène d'interférences qui code le mesurande dans la phase d'un signal périodique. Le signal interférométrique bidimensionnel qui est alors enregistré par l'intermédiaire d'un capteur d'images est appelé **figure de franges**. Ces franges apparaissent usuellement comme des bandes alternativement brillantes ou sombres qui représentent des lignes de contour du mesurande. La formulation mathématique de ce champ d'interférences peut être définie à l'aide de coordonnées spatiales (x, y, z) et de la coordonnées temporelles t . Ainsi on écrira :

$$I(x, y, z, t) = I_0(x, y, z, t) [1 + m(x, y, z, t) f(\Delta\varphi(x, y, z, t))]$$

où nous avons

$I_0(x, y, z, t)$, le niveau moyen du signal

$m(x, y, z, t)$, la modulation de la figure de franges (contraste)

$\Delta\varphi(x, y, z, t)$, la phase optique codant le mesurande

(...), une fonction définissant le profil des franges

La fonction $f(\dots)$ sera sinusoidale pour des interférences à deux ondes, harmonique pour des franges non sinusoidales, lorentzienne pour des interférences en sur-exposition, rectangulaire pour des interférences avec des grilles ou bien trapézoïdale pour des interférences multiples avec des grilles.

Cette périodicité de la figure de franges, quelle que soit le mode expérimental de genèse, incite à écrire l'intensité sous forme harmonique

$$I(x, y, z, t) = a(x, y, z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x, y, z, t) \cos(n\Delta\varphi(x, y, z, t))$$

avec maintenant $a(x, y, z, t)$ le niveau moyen (fond) et $b_n(x, y, z, t)$ l'amplitude de l'harmonique de rang n .

D'un point de vue purement métrologique, les techniques optiques dont le signal utile est une figure de franges constituent un outil de mesure puissant puisqu'elles donnent une information spatiale instantanée contrairement à un grand nombre de procédés qui ne fournissent l'information qu'en un seul point et éventuellement en une matrice de points après balayage (procédé long et fastidieux en général) ; de plus, ces procédés optiques codent une information d'une certaine magnitude (le mesurande), généralement défini dans un espace bi ou tridimensionnel.

Ce codage peut être appréhendé dans la majorité des cas comme une double application qui, d'une part, affecte une certaine valeur du signal à chaque valeur de la dite magnitude, et d'autre part, qui affecte chaque point de l'espace à la valeur interférométrique correspondante. La première affectation des valeurs correspondantes est réalisée par la phase $\Delta\varphi(x, y, z, t)$ via une relation spécifique à chaque situation. La seconde affectation est, comme la première, intimement liée au procédé optique de mesure et elle est établie par l'analyse de la formation des images lorsque la lumière traverse les divers composants qui constituent le système de mesure.

Ainsi, la figure de franges donne une information dans laquelle les franges constituent des lignes d'égalité de phase optique. Dans la plupart des applications, le système optique est conçu de sorte que le fond moyen $I_0(x, y, z, t)$ et le contraste $m(x, y, z, t)$ restent quasi constants dans le champ de mesure. Cependant, certaines méthodes (interférométrie speckle par exemple) de part leur fondement ne permettent pas d'obtenir une constance de $I_0(x, y, z, t)$ et $m(x, y, z, t)$. C'est pourquoi, l'évolution technologique incitée par la demande croissante de précision, de rapidité ou encore d'automatisation des procédés, a contribué au développement

des méthodes dans lesquelles des interpolations fines entre les valeurs extrêmes masquent les variations rapides de $I_0(x, y, z, t)$ et $m(x, y, z, t)$, éliminent les ambiguïtés sur la mesure de $\Delta\varphi(x, y, z, t)$ et permettent une analyse même par un non spécialiste du domaine.

L'analyse de la figure de franges fait l'objet de ce cours d'interférométrie. Généralement, l'analyse d'une figure de franges se déroule suivant différentes étapes :

- **Évaluation de la phase optique** ; consiste à obtenir la distribution spatiale de phase optique $\Delta\varphi$, appelée classiquement carte de phase (« phase map » en anglais), à partir d'une ou de plusieurs figures d'interférences associées au même mesurande.
- **Déroulement de la phase** ; l'étape précédente donne, dans la grande majorité des cas, une distribution de phase modulo 2π ; l'indétermination de l'ordre d'interférence k doit être levée pour obtenir une continuité de la phase, c'est à dire $\Delta\varphi = 2k\pi$; la détermination de cet ordre k s'appelle le déroulement de phase (« phase unwrapping » en anglais).
- **Élimination des termes indésirables** ; les termes parasites qui ont pu être introduit dans la phase et qui ne portent aucune information utile sur le mesurande doivent être supprimés par une approximation par moindres carrés, un procédé itératif ou tout autre méthode adaptée ; ces termes ont pu être introduit pendant la formation des franges et/ou pendant l'étape d'évaluation de la phase.
- **Re-échelonnage** ; dans la plupart des cas, la présentation correcte des résultats impose une relation entre les valeurs du mesurande et le système de coordonnées de l'espace dans lequel il est défini (une expression mathématique, une table, un graphique, relation entre niveaux de gris ou codes de couleurs, etc.) ; cette étape nécessite donc la connaissance de la relation existant, d'une part, entre la phase $\Delta\varphi$ et l'amplitude du mesurande et, d'autre part, entre l'espace bidimensionnel de la carte de phase et le domaine spatial du mesurande ; ces relations dépendent bien sûr de la méthode utilisée.
- **Recalage** ; dans certains cas il est nécessaire de confronter l'expérimentation au modèle analytique ; on est donc amené à effectuer un recalage entre la simulation numérique sensée décrire le comportement de l'élément analysé et la mesure qui apporte une analyse objective de ce comportement.

Une fois le recalage terminé, le procédé d'analyse peut être considéré comme achevé ; cependant on ne se contente souvent que des trois premières étapes. La première étape, l'évaluation de la phase, est commune et indépendante des autres étapes et la plupart du temps indépendante de l'amplitude du mesurande. Dans ce cours, on se focalise donc sur cette première étape et on présente les méthodes qui permettent d'évaluer la phase optique $\Delta\varphi$.

Les méthodes de démodulation de la phase optique ont été employées depuis que les méthodes optiques permettent de mesurer des paramètres physiques et ce dans une grande variété de domaines d'application (mécanique, vibrations, thermique, mécanique des fluides, ouvrages d'arts, matériaux, etc.). Leur utilisation a longtemps été inhibée car leur exploitation a longtemps été manuelle. La quantification de la phase ne pouvait être atteinte que sur les points extrémaux de la figure de franges qui était simplement photographiée et surexposée pour les en faire ressortir. Ces procédures étaient fastidieuses et inefficaces car il était très difficile de différencier le signal utile du bruit.

Durant les années 1960, les premières caméras vidéos et ordinateurs permirent l'acquisition et le stockage des figures de franges dans un format adéquat pour une manipulation à posteriori. Ceci augmenta la rapidité et la performance des mesures par l'utilisation de procédés (moyennes statistiques par ex.) pour augmenter le contraste et réduire le bruit de sorte que les extrémaux des figures de franges devinrent plus facile à isoler. Ces méthodes primaires ont été remplacées rapidement au milieu des années 1970 [1 [Use of an ac Heterodyne Lateral Shear Interferometer With Real-Time Wavefront Correction Systems], 2 [Digital Wavefront Measuring Interferometer for Testing Optical Surfaces and Lenses]] par les premières techniques basées sur le traitement d'image donnant la phase directement. L'augmentation de la vitesse et de la capacité de stockage des ordinateurs combiné avec la baisse de leur prix,

favorisa leur utilisation et leur développement rapide. Actuellement ces méthodes constituent un outil versatile de la métrologie optique.

Les méthodes d'évaluation de la phase sont diverses et variées et elles ont chacune leurs points forts qui les rendent les plus efficaces pour certaines applications spécifiques, sans qu'une seule de ces méthodes soit la méthode universelle et optimale. Une des méthodes les plus utilisées actuellement est la méthode du décalage de phase, au cours de laquelle la phase optique $\Delta\varphi$ est estimée à l'aide d'une série de figures de franges déphasées combinées à une fonction arctangente. Compte tenu de son importance, ce cours lui sera consacré en grande partie et donnera une possible classification, les différentes stratégies pour la modulation de phase et l'analyse des erreurs.

1. Principe de démodulation de phase

D'une manière générale, les méthodes de démodulation de phase utilisent une modulation de la phase optique par laquelle un terme de phase supplémentaire $\zeta(x, y, t)$ est ajouté à la phase utile $\Delta\varphi$. Ainsi l'expression de la figure de franges peut être ré-écrite comme :

$$I(x, y, z, t) = a(x, y, z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x, y, z, t) \cos(n\Delta\varphi(x, y, z, t) + n\zeta(x, y, t))$$

Cette modulation de phase peut être purement temporelle et elle produit une variation de phase uniforme dans le plan de la figure de franges :

$$\zeta(x, y, t) = 2\pi f_0 t$$

La modulation peut également être purement spatiale :

$$\zeta(x, y, t) = 2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y$$

dans ce dernier cas, la modulation produit une variation de phase dans le plan de l'image qui est communément appelée la « porteuse spatiale ».

Les paramètres u_0, v_0, f_0 sont les fréquences porteuses des modulations. Ainsi pour décrire le procédé de démodulation, il est judicieux de se concentrer sur les paramètres des fréquences porteuses, les termes de $a(x, y, z, t)$ et $b_n(x, y, z, t)$ étant généralement indépendants des termes de modulation. Un procédé générique de démodulation doit donc fournir la phase $\Delta\varphi(x, y, z, t)$ indépendamment de $a(x, y, z, t)$ et $b_n(x, y, z, t)$. La combinaison des différentes possibilités d'extraction de la phase avec l'une des deux modulations possibles a conduit à une très grande variété de méthodes avec leur algorithme, leur applicabilité et leur performance propre.

La plupart de ces méthodes supposent que le profil est sinusoïdal c'est à dire qu'il ne contient qu'une seule harmonique dans la décomposition, mais un bon nombre d'entre elles peut être utilisé sur d'autres profils moyennant quelques aménagements.

1.1. Classification des techniques de démodulation de phase

Une première classification se base sur la distinction entre méthodes globales et méthodes locales. Une méthode locale est une méthode qui calcule la phase optique en un seul point en utilisant des valeurs successives du signal en ce point ou bien un ensemble de valeurs en un groupe de points l'entourant, tandis qu'une méthode globale donnera la phase optique en tous les points pour lesquels la figure de franges a été enregistrée. Une différence importante entre

ces deux approches est que pour une méthode locale, les valeurs de a , b_n et $\Delta\varphi$ restent constantes sur chaque cellule de calcul ; pour une méthode globale la cellule de calcul comprend toute la figure de franges, la phase $\Delta\varphi$ varie donc dans le champ et son évaluation dépend de la faculté à supprimer les effets nuisibles des variations de a et b_n dans la figure en isolant leurs contributions.

Une autre classification peut être basée sur la distinction entre méthodes temporelles et spatiales. Dans le premier cas, les données nécessaires à l'évaluation de la phase sont obtenues à différents intervalles de temps, tandis que dans le second cas, toutes les données sont obtenues simultanément.

Dans ce cours, il a été choisi d'aborder les méthodes selon qu'elles nécessitent ou non l'introduction d'une porteuse spatiale. En effet, les méthodes basées sur la porteuse spatiale utilisent le même domaine spatial de représentation de l'image (les pixels), contrairement aux autres méthodes pour lesquelles chaque pixel est interrogé indépendamment des autres à des instants différents ce qui nécessite l'acquisition de plusieurs figures de franges à différents intervalles de temps. Ainsi, les limitations de la technique à porteuse spatiale apparaissent dans la dynamique de mesure de la phase optique et donc des variations spatiales de phase tolérable pour la méthode.

Les limitations sont liées aux effets de recouvrement de spectre et peuvent être exprimés comme une fraction de la fréquence porteuse, dont la limite ultime sera la densité de pixels en regard de la densité de franges. Cependant, ces méthodes nécessitent de n'enregistrer qu'une seule figure de franges pour estimer la phase et sont donc bien adaptées à l'étude de phénomènes transitoires ou dynamiques : on peut les qualifier de méthodes temps réel.

Selon ce critère on classera donc les méthodes comme suit :

- Démodulation de phase sans porteuse spatiale
 - décalage de phase temporel
 - décalage de phase par marche
 - décalage de phase spatial
 - modulation de phase sinusoïdale
- Démodulation de phase avec porteuse spatiale
 - démodulation par transformée de Fourier
 - décalage de phase à porteuse spatiale
 - démodulation synchrone spatiale

Ces différentes méthodes seront présentées dans la suite.

1.2. Ambiguïté sur le signe de la phase

Lorsque l'on tente d'extraire la phase $\Delta\varphi$ d'un interférogramme par une inversion de la forme analytique de la figure de franges, le problème du signe de la phase apparaît car la fonction cosinus n'est pas une fonction bijective mais elle est paire et périodique. Ainsi une phase déterminée à partir d'une seule figure de franges reste indéfinie à un multiple entier de 2π près et au signe près. Chaque méthode de démodulation de phase contient une fonction trigonométrique inverse. Chaque fonction trigonométrique inverse peut s'exprimer par une fonction arctangente, comme par exemple : $\arccos(x) = \arctan(\sqrt{1-x^2}/x^2)$.

Le résultat de l'arctangente d'une seule variable est comprise principalement dans l'intervalle $[-\pi/2, +\pi/2]$

Dans la plupart des techniques de démodulation de phase, l'argument de la fonction arctangente est un quotient dans lequel le numérateur caractérise le sinus de la phase et le dénominateur son cosinus. Ainsi, il est intéressant de considérer numérateur et dénominateur séparément pour obtenir une valeur comprise dans l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ en considérant le signe de chaque grandeur. Les quatre situations possibles pour le signe de sinus, cosinus et tangente sont indiquées figure 1.

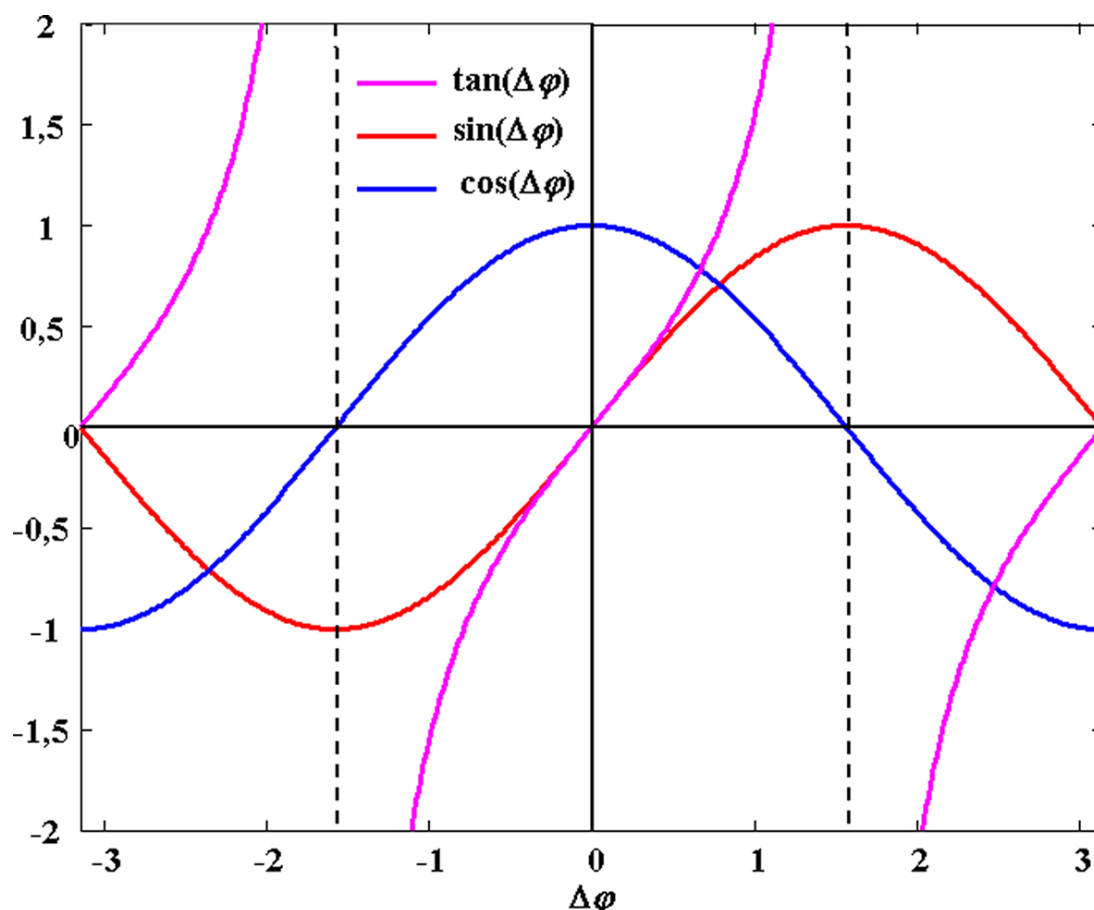


Figure 1 : Signes des fonctions trigonométriques

Cependant, la détermination sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ ne suffit pas à supprimer l'indétermination modulo 2π ainsi que l'ambiguïté sur le signe.

Une technique pratique pour extraire le signe est de prendre en compte certaines informations sur les conditions expérimentales qui génèrent la phase optique et la distribution dans la figure de franges. Par exemple, le sens de déplacement de la structure étudiée peut être à priori connu, ce qui fixera le signe de la variation de phase.

Remarque

Pour éliminer l'ambiguïté sur le signe sans connaissance à priori sur le phénomène observé, il sera nécessaire d'introduire une porteuse spatiale ou bien d'enregistrer plusieurs figures de franges avec décalage de phase par exemple.

1.3. Nécessité d'un déroulement de phase

La discontinuité à 2π de la phase extraite se manifeste par le fait que lorsqu'une valeur extrême est atteinte, $+\pi$ ou $-\pi$, la phase saute à l'autre extrémité de l'intervalle, $-\pi$ ou $+\pi$, bien que la phase optique physiquement réelle soit continue et croissante ou décroissante de manière relativement douce. En effet, considérons une phase continue proportionnelle à un mesurande physique (déplacement, épaisseur, vitesse, etc..) variant linéairement selon une rangée de pixels du détecteur. La figure 2 illustre cette variation.

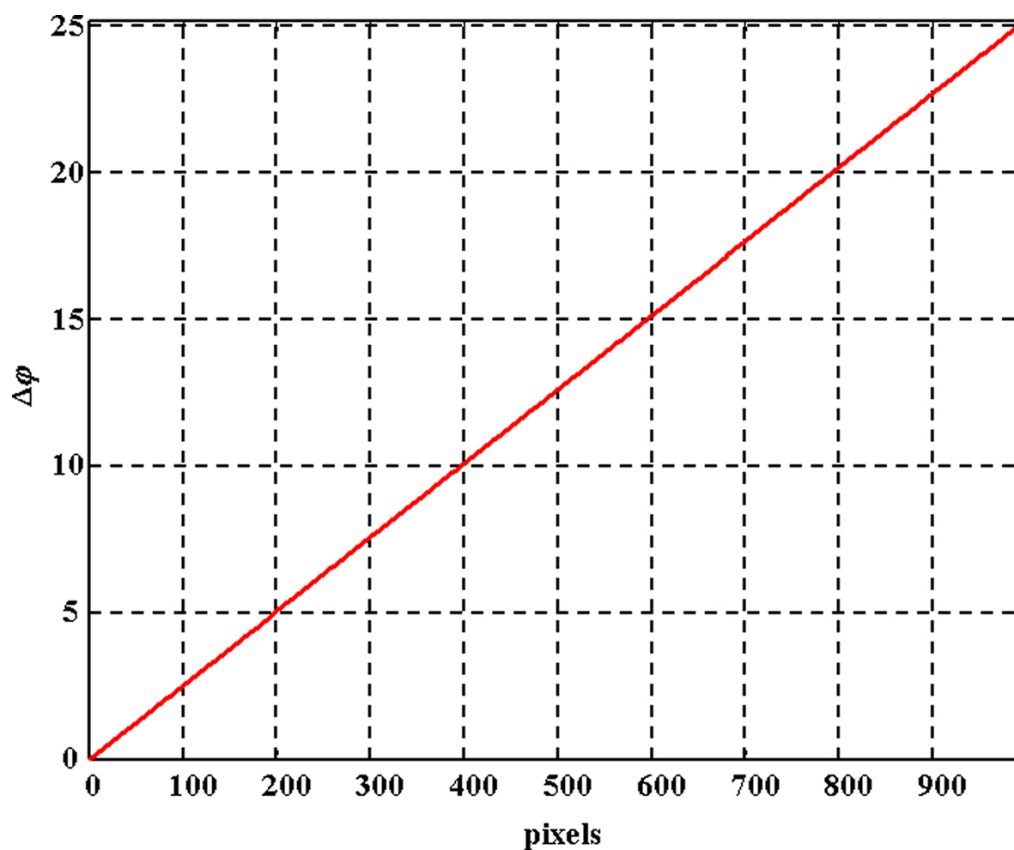


Figure 2 : Variation continue de la phase optique

Lors de la démodulation du signal interférométrique codant cette variation, l'évaluation par une fonction arctangente, donne une variation de phase discontinue avec des sauts de phase à $\pm\pi$. La figure 3 illustre cette propriété.

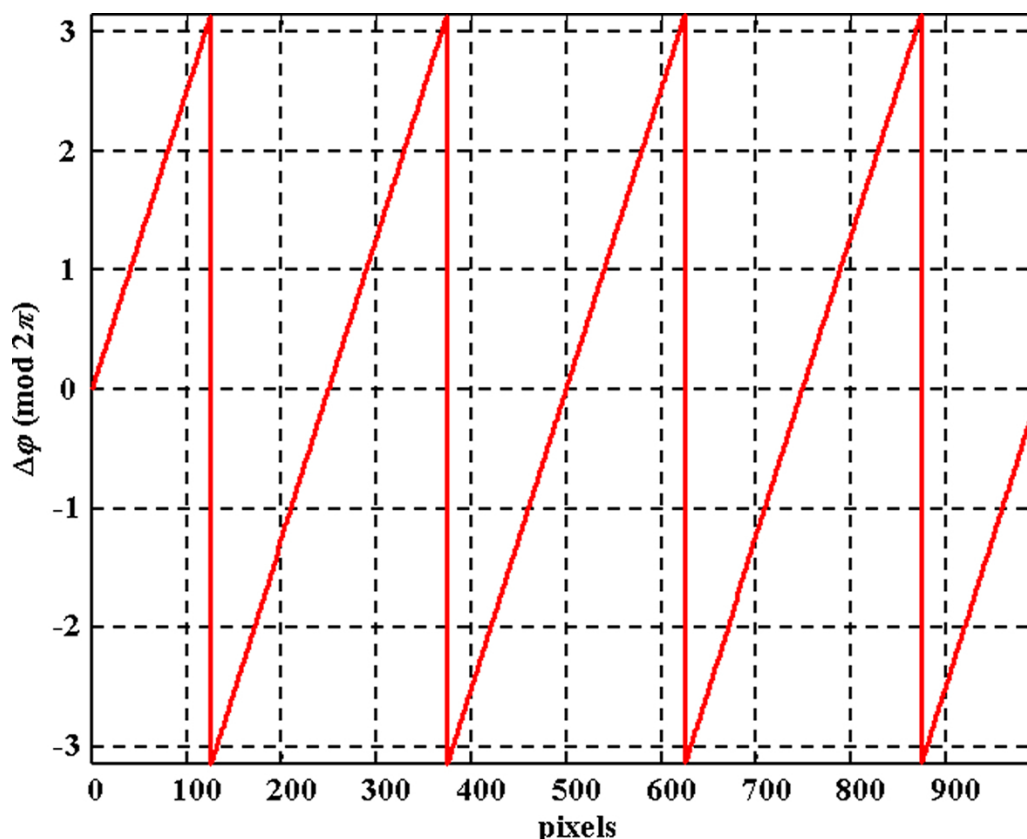


Figure 3 : Variation discontinue de la phase optique

La reconstruction de la variation de phase physiquement continue peut être effectuée par addition ou soustraction d'un chiffre multiple entier de 2π , cette procédure conduisant à la suppression des sauts de phase. L'opération qui consiste à obtenir l'ordre de chaque frange et donc à reconstituer la continuité physique de la carte de phase s'appelle le déroulement de phase, « phase unwrapping » en anglais [[Two-Dimensional Phase Unwrapping : Theory, Algorithms and Software]]. La procédure commence généralement en un point de la carte de phase choisi arbitrairement et pour lequel l'entier vaut 0. Une fois la carte déroulée (« unwrapped »), la phase optique pourra être considérée à un terme constant près qui restera indéterminé si on ne peut connaître réellement un point de la carte de phase pour lequel la phase optique est effectivement nulle. Le problème ne se pose plus lorsque la source de lumière est à large spectre (lumière blanche par exemple), puisque les franges d'interférences sont localisées au voisinage de la différence de marche nulle, la frange blanche indiquant la phase optique nulle.

La figure 4 présente une ligne d'une carte de phase expérimentale obtenue après démodulation. Les sauts de phase sont clairement visibles.

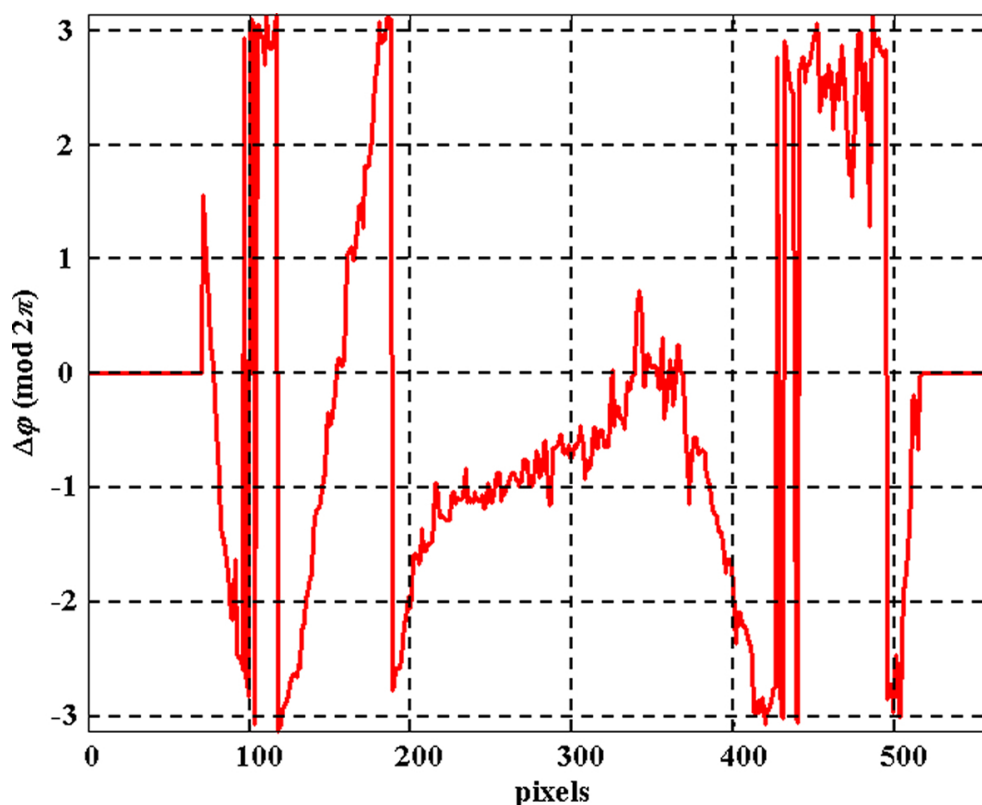


Figure 4 : Phase roulée expérimentale

Le résultat du déroulement de phase sur cette ligne est présenté figure 5. Le point de départ de l'algorithme de déroulement est situé au pixel N°1.

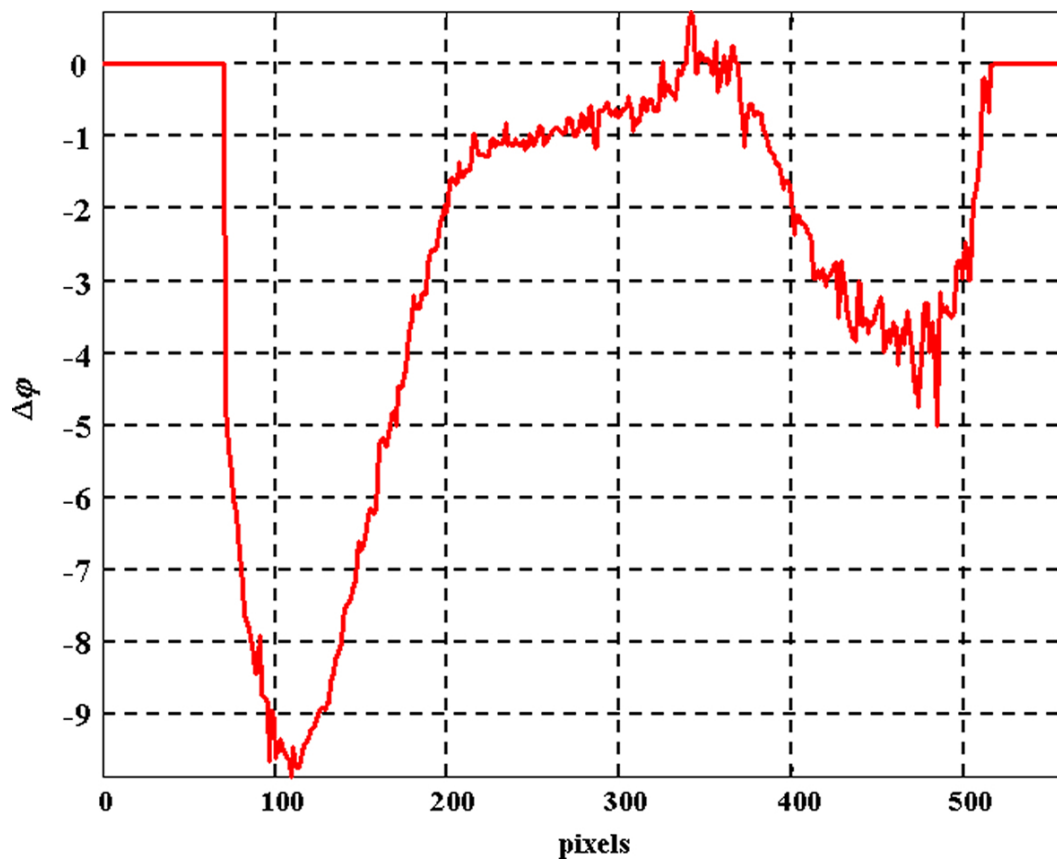


Figure 5 : Phase déroulée

Le zéro de cette variation de phase ne peut pas être déterminé simplement.

Ce résultat constitue une introduction au déroulement de phase et il ne sera pas détaillé les différents types d'algorithmes. En effet, les techniques de déroulement de phase se sont sophistiquées ces dix dernières années avec l'apparition d'algorithmes puissants dont l'implantation n'est pas toujours aisée. Pour une description complète, le lecteur est renvoyé à la référence bibliographique [[Two-Dimensional Phase Unwrapping : Theory, Algorithms and Software]].

L'opération de « **unwrapping** » est relativement aisée à mener dans le cas où le nombre de pixels par franges d'interférences est grand et dans le cas où le rapport signal/bruit de l'interférogramme est élevé. Dans ce cas, le déroulement de phase consiste à ajouter/retrancher $2\pi \text{ rad}$ à chaque fois qu'une discontinuité est détectée dans $\Delta\varphi$ modulo 2π . Le balayage de la carte de phase peut être effectué verticalement ou horizontalement. Cet idéal n'est pas souvent rencontré en pratique car le niveau de bruit peut être élevé comme par exemple dans les méthodes d'interférométrie de speckle. La procédure devient alors dramatiquement compliquée.

Remarque

D'une manière générale, les algorithmes déroulent la phase en définissant un critère pour l'identification des discontinuités.

Les algorithmes peuvent être classés en deux catégories :

- algorithmes indépendant du chemin parcouru sur la carte de phase, ou algorithmes « **globaux** » ; ils procèdent en une seule fois en identifiant, isolant et excluant les zones de $\Delta\varphi$ qui pourraient conduire à une erreur d'identification des discontinuités ; le processus de déroulement est mené suivant un chemin arbitraire de la carte de phase.
- algorithmes dépendant du chemin suivi, ou algorithmes « **locaux** » ; ils donneront la phase continue, point par point en suivant un chemin déterminé.

Les algorithmes développés dernièrement déroulent efficacement même lorsque le niveau de bruit est comparable à la valeur de la phase, lorsque les interférogrammes ont une faible modulation, lorsque la phase propose des sauts de phase abruptes dus à une discontinuité du mesurande, ou bien encore lorsque la densité de pixels par franges est faible.

Les algorithmes seront distingués selon leur temps de calcul, leur sensibilité aux propagations d'erreurs durant le déroulement et leur robustesse par rapport aux éléments mentionnés ci dessus. Malgré les grands progrès réalisés à ce jours, il faut signaler qu'aucun des algorithmes ne peut réagir positivement à une accumulation simultanée des problèmes signalés. Chacun d'entre eux n'est en fait efficace que sur un problème particulier et il ne pourra agir complètement que si on lui fournit des informations supplémentaires. De ce fait, il n'existe actuellement aucun algorithme entièrement automatique.

Exemple

Par exemple, une stratégie possible pour que l'algorithme soit insensible au bruit de la carte de phase consiste à comparer le point courant traité avec un voisinage qui a déjà été déroulé. Pour être insensible aux pics de bruit, la comparaison pourrait être effectuée après filtrage passe bas du voisinage considéré (filtre moyenne glissante ou filtre médian par exemple). Ensuite, on passe au point suivant en utilisant le même voisinage ou en le modifiant légèrement, et ainsi de suite : on propage donc cet algorithme dans toute l'image. Pour commencer à dérouler, l'algorithme a donc besoin de connaître une zone dans laquelle il n'y a pas de saut de phase. Cette zone peut être choisie arbitrairement dans l'image, mais elle peut aussi être choisie par intervention de l'expérimentateur, qui identifiera une zone peu dense en franges.

Cette stratégie donne accès à une immunité totale au bruit, en revanche elle est sensible à des ouvertures de franges (perte de continuité des lignes de contour $\pm\pi$) et propagera des erreurs sur toute la carte de phase. Toutefois, il sera toujours possible de « retoucher » localement les zones concernées par intervention de l'expérimentateur.

2. Démodulation de phase sans porteuse spatiale

2.1. Décalage de phase temporel

Cette méthode impose que la modulation de phase soit linéaire et uniforme dans le champ de vue pendant l'intégration temporelle du détecteur. Nous avons donc :

$$\xi(x, y, t) = 2\pi f_0 t$$

Une série de figures de franges avec un incrément de phase sont enregistrées et le déphasage parcouru pendant l'intégration doit être identique d'une acquisition à l'autre [1 [Use of an ac Heterodyne Lateral Shear Interferometer With Real-Time Wavefront Correction Systems],4 [Phase Measurement Interferometry Techniques]]. Si la phase optique est à variation temporelle rapide, l'enregistrement doit être effectué avec une bande passante extrêmement élevée et dans ce cas on se heurte à un problème technologique car les caméras actuelles permettent rarement d'excéder 200 images/s avec des résolutions de $1024 \times 1024 \text{ pixels}$. Dans le cas où la phase est statique ou quasi-statique, la bande passante peut être faible puisque la modulation linéaire peut être « lente », c'est à dire que l'on enregistre une image par cycle de caméra, typiquement à 25 images/s . Le détecteur intègre au cours du temps le signal de franges.

Considérons un profil de franges sinusoidal, le niveau moyen, le contraste et la phase étant statiques. La dépendance spatiale étant sous entendue, le signal de franges modulé est de la forme :

$$I(t) = a + b \cos(\Delta\varphi + 2\pi f_0 t)$$

Chaque image est obtenue par intégration pendant un intervalle de temps ΔT :

$$E_n = \frac{1}{\Delta T} \int_{(n-1)\Delta T}^{n\Delta T} I(t) dt = a + \frac{b}{\Delta T} \int_{(n-1)\Delta T}^{n\Delta T} \cos(\Delta\varphi + 2\pi f_0 t) dt$$

Cette technique est bien connue sous le nom de « **integrating bucket** » en anglais. La figure 6 illustre le processus d'enregistrement en montrant le signal interférométrique et l'aire sous sa courbe qui correspond à l'intégration temporelle sur chaque intervalle de temps de durée ΔT .

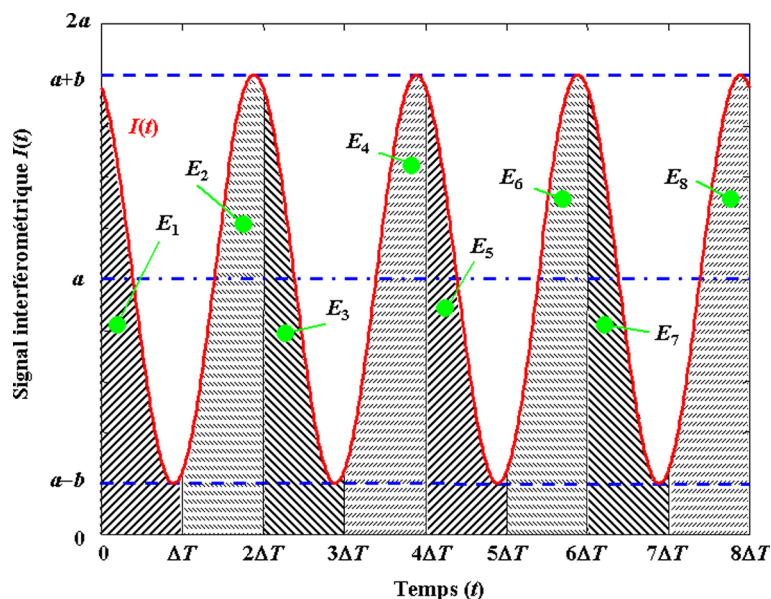


Figure 6 : Signal interférométrique et intégration temporelle

Le calcul de l'intégration temporelle donne

$$E_n = a + b \operatorname{sinc}(\pi f_0 \Delta T) \cos(\Delta \varphi + 2\pi f_0 (n - \frac{1}{2}) \Delta T)$$

Posons $\phi = 2\pi f_0 \Delta t$, ϕ est l'incrément de phase entre chaque image. Nous avons maintenant :

$$E_n = a + b \operatorname{sinc}\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\Delta \varphi + n \phi - \frac{\phi}{2}\right)$$

Les valeurs enregistrées pour chaque intervalle de temps d'intégration sont représentées graphiquement sur la figure 7. Les échantillons suivent bien un signal sinusoïdal (représenté en pointillés) dont la modulation est inférieure à celle du signal initial.

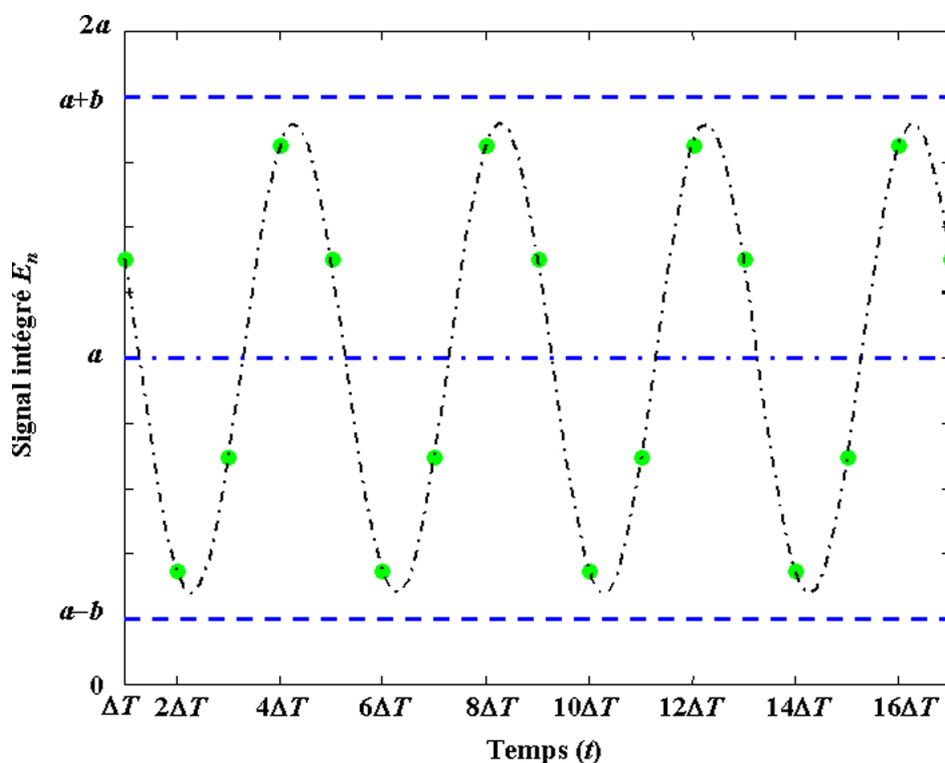


Figure 7 : Echantillons du signal intégré

D'un point de vue mathématique, l'expression du signal d'interférences intégré temporellement contient trois inconnues a , b et $\Delta\phi$, parmi lesquelles $\Delta\phi$ est le principal à déterminer. Pour résoudre cette équation, il faut donc au moins trois équations, qui généreront un système d'au moins trois équations à trois inconnues. La résolution du système donnera accès à ces paramètres. Si on enregistre au moins trois interférogrammes E_n , alors il sera possible de déterminer numériquement $\Delta\phi$.

Remarque

On constate ainsi que la méthode du décalage de phase consiste en un échantillonnage tridimensionnel de la figure de franges : deux dimensions planaires avec l'image et une dimension longitudinale avec la variation de la phase optique $\phi = 2\pi f_0 \Delta t$. Le choix des valeurs de ϕ doit tenir compte du théorème de Shannon et on doit enregistrer au moins deux valeurs du signal par période des franges, ce qui impose $\phi < \pi$.

Considérons par exemple que ϕ soit égal à $\pi/2$. Avec un système d'acquisition fonctionnant à 25 Hz , on a $\Delta t = 40 \text{ ms}$ et il faudra imposer $\nu = 6,25 \text{ Hz}$; l'enregistrement de 4 interférogrammes donnera :

$$E_1 = a + b \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\Delta\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$E_2 = a + b \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\Delta\varphi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_3 = a + b \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\Delta\varphi + \frac{\pi}{4} + \pi\right)$$

$$E_4 = a + b \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\Delta\varphi + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)$$

La modulation des franges est donc réduite d'environ 10% puisque $\operatorname{sinc}(\pi/4) = 0,9$. On en déduit la phase $\Delta\phi$ par une fonction arctangente :

$$\Delta\varphi = \arctan\left(\frac{E_4 - E_2}{E_1 - E_3}\right) - \frac{\pi}{4}$$

L'amplitude de l'oscillation des franges peut être évaluée par :

$$b|\operatorname{sinc}(\pi/4)| = \frac{1}{2} \sqrt{(E_1 - E_3)^2 + (E_4 - E_2)^2}$$

et la composante continue du signal est déterminée par :

$$a = \frac{1}{4}(E_1 + E_2 + E_3 + E_4)$$

Ainsi, on peut déterminer le taux de modulation des franges :

$$m = \frac{b|\operatorname{sinc}(\pi/4)|}{a} = \frac{2\sqrt{(E_1 - E_3)^2 + (E_4 - E_2)^2}}{E_1 + E_2 + E_3 + E_4}$$

La détermination du taux de modulation à partir des enregistrements peut être mise à profit pour extraire la zone utile de traitement des interférogrammes. En effet, les pixels pour lesquels la modulation est supérieure à un certain seuil ($m > 10\%$ par exemple) seront traités et on leur affectera la valeur 1 dans l'image de masque des données, tandis que les autres ($m < 10\%$) se verront attribuer la valeur 0 dans le masque. Le logiciel de dépouillement d'interférogrammes traitera uniquement les pixels dont la valeur du masque sera 1.

2.2. Décalage de phase par marche

Dans ce cas, la modulation de phase est une marche de phase que l'on maintient constante pendant l'intégration temporelle du détecteur [2 [Digital Wavefront Measuring Interferometer for Testing Optical Surfaces and Lenses], 4 [Phase Measurement Interferometry Techniques]]. On impose non plus une rampe comme pour les précédents, mais une variation en marche d'escalier. Le signal instantané s'écrit donc

$$I(t) = a + b \cos(\Delta\varphi + 2\pi\phi(t))$$

et le signal intégré par le détecteur pendant un intervalle de temps Δt , pendant lequel $\phi(t)$ est constant et égal à ϕ_n , est écrit comme

$$E_n = a + b \cos(\Delta\varphi + \phi_n)$$

La figure 8 présente la variation de la phase par marche.

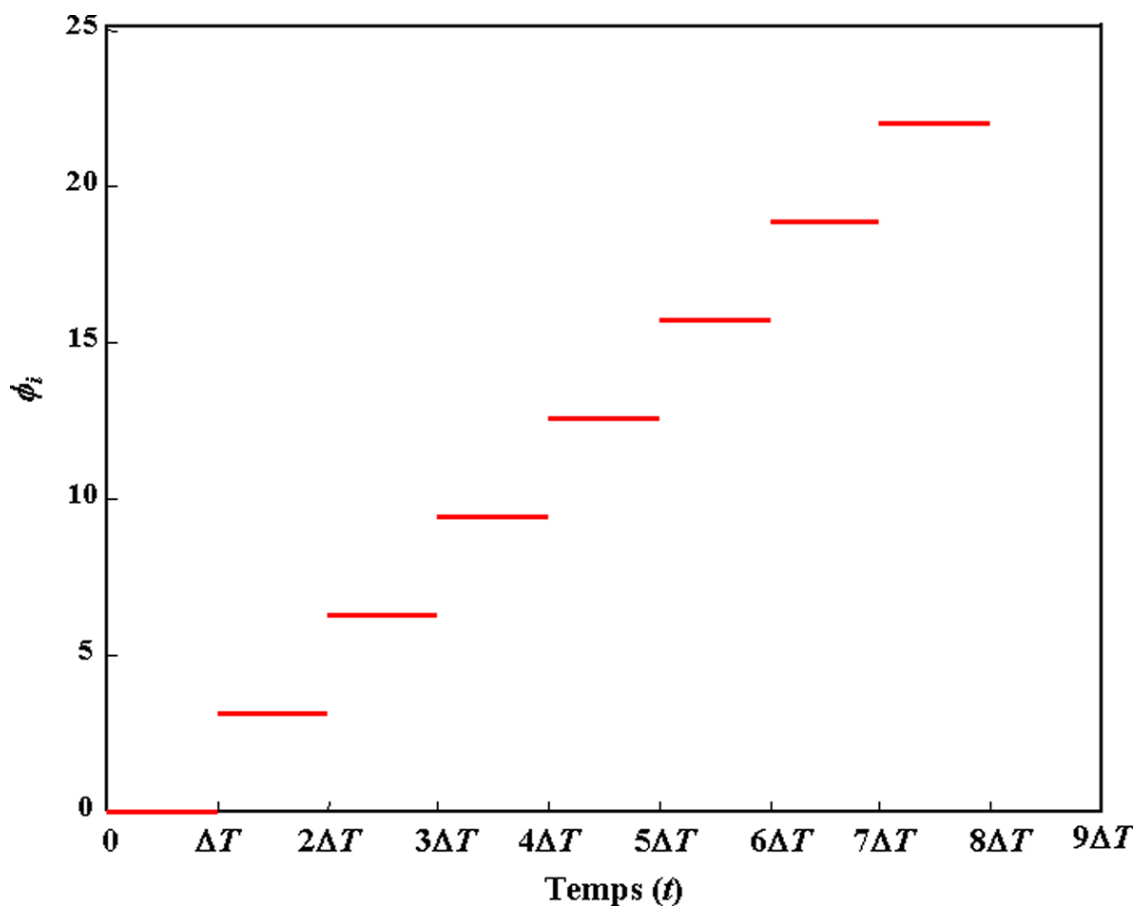


Figure 8 : Marche de phase

Les valeurs enregistrées pour chaque marche de phase sont représentées graphiquement sur la figure 9. Les échantillons suivent le signal sinusoïdal (représenté en pointillés) avec une modulation et un déphasage identique.

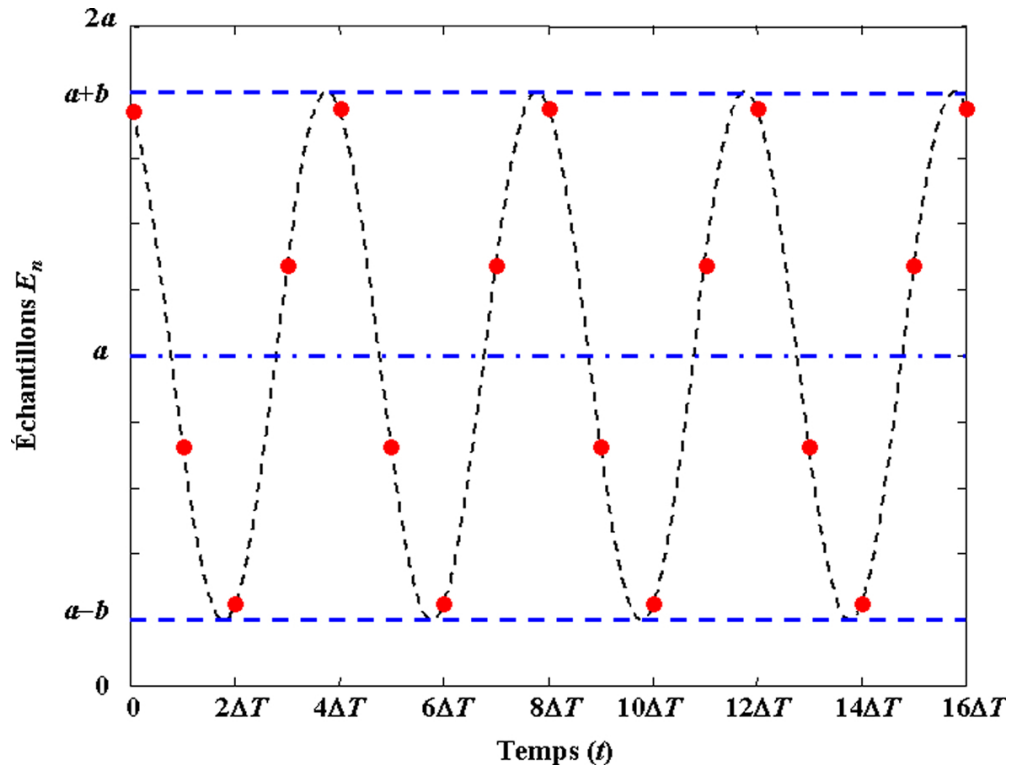


Figure 9 : Échantillons enregistrés

Considérons le cas où on enregistre trois images avec $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 2\pi/3$ et $\phi_3 = 4\pi/3$, on obtient le système matriciel suivant :

$$\begin{aligned} E_1 &= a + b \cos(\Delta\varphi) \\ E_2 &= a + b \cos(\Delta\varphi + 2\pi/3) \\ E_3 &= a + b \cos(\Delta\varphi + 4\pi/3) \end{aligned}$$

en développant les E_n on obtient

$$\begin{aligned} E_2 &= a - \frac{1}{2}b \cos(\Delta\varphi) - \frac{\sqrt{3}}{2}b \sin(\Delta\varphi) \\ E_3 &= a - \frac{1}{2}b \cos(\Delta\varphi) + \frac{\sqrt{3}}{2}b \sin(\Delta\varphi) \end{aligned}$$

et puisque

$$\begin{aligned} 2E_1 - E_2 - E_3 &= 3b \cos(\Delta\varphi) \\ E_3 - E_2 &= \sqrt{3}b \sin(\Delta\varphi) \end{aligned}$$

on obtient la phase recherchée par une fonction arctangente :

$$\Delta\varphi = \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}} \frac{E_3 - E_2}{2E_1 - E_2 - E_3}\right)$$

L'amplitude de l'oscillation des franges peut être évaluée par :

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{3}(2E_1 - E_2 - E_3)^2 + (E_3 - E_2)^2}$$

et la composante continue du signal est déterminée par :

$$a = \frac{1}{3}(E_1 + E_2 + E_3)$$

Ainsi, on peut déterminer le taux de modulation des franges :

$$m = \sqrt{3} \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(2E_1 - E_2 - E_3)^2 + (E_3 - E_2)^2}}{E_1 + E_2 + E_3}$$

Cette technique est bien connue sous le nom de « **phase stepping** » en anglais.

2.3. Généralisation

La méthode du décalage de phase est apparue en 1966 [5 [Installation et Utilisation du Comparateur Photoélectrique et Interférentiel du Bureau International des Poids et Mesures,]], lorsque P. Carré inventa le procédé pour le comparateur interférentiel du Bureau International des Poids et Mesures (BIPM).

Remarque

Cette méthode présente l'avantage de ne pas nécessiter l'intervention d'un expérimentateur à partir du moment où on a enregistré les interférogrammes. C'est d'ailleurs pour cela que la méthode est actuellement largement utilisée dans les appareils commerciaux : interféromètre de Fizeau, microscope interférentiel, projection de franges, shearographie, moiré, etc. Les algorithmes de décalage de phase considèrent généralement que la figure de franges est une forme sinusoïdale d'interférences à deux ondes. L'interférogramme s'écrit donc, d'une manière générale en sous-entendant les dépendances spatiales et éventuellement temporelles,

$$E_n = a + b \cos(\Delta\phi + (n-1)\phi) \quad n=1,2,3,\dots,N$$

où ϕ est le dit « **décalage de phase** ». A partir de cette expression simple, qui contient trois inconnues, a , b , $\Delta\phi$ ou éventuellement quatre avec ϕ selon le degré de connaissance sur ϕ , on comprend bien qu'il est nécessaire d'avoir au moins trois équations pour espérer résoudre les inconnues. Ainsi, si on fait varier la valeur de ϕ suivant N valeurs, on obtiendra N équations à trois (ou quatre) inconnues que l'on saura résoudre.

Les **avantages principaux du décalage de phase** sont les suivants :

- basse sensibilité au bruit stationnaire dans le domaine dans lequel ϕ varie ; par exemple, pour le décalage de phase temporel l'algorithme est insensible aux non-uniformités de a et b ainsi que la variation de sensibilité du détecteur d'un pixel à l'autre,
- les algorithmes peuvent être utilisés avec des figures de franges très peu contrastées,
- l'incertitude sur le résultat est limitée par le rapport signal/bruit de la figure de franges ; les erreurs systématiques peuvent être suffisamment réduites de sorte que c'est le bruit (photon par ex.) qui limitera l'incertitude,
- le processus de dépouillement des franges peut être complètement automatisé,

- la phase optique $\Delta\varphi$ est déterminée pour tous les points de l'interférogramme,
- la résolution spatiale est élevée car le nombre de points de mesure coïncide avec le nombre de pixels de la caméra d'acquisition d'images,
- la puissance de calcul actuellement disponible (PC inclus) permet des temps de calcul inférieurs à 1 s.

En fait, la principale limitation des algorithmes vient du calcul de la phase modulo 2π . De plus, le pas minimum des franges d'interférences dans le plan de la matrice de pixels doit être supérieur à 2 pixels par franges.

Les algorithmes de décalage de phase peuvent être classés selon plusieurs critères. Nous suivrons une classification en deux groupes : le plus grand groupe contient les algorithmes que nous nommerons « **génériques** », obtenus par un procédé systématique. Le second groupe contient les algorithmes dits « **spécifiques** » qui concernent les algorithmes génériques pour lesquels les hypothèses ne sont plus valables et la phase $\Delta\varphi$ n'en n'est pas le résultat direct. [6 [Phase Evaluation Methods in Whole-Field Optical Measurement Techniques]]

Dans le cadre de ce cours, on se focalisera sur les algorithmes génériques.

2.4. Algorithmes génériques

Ces algorithmes utilisent des valeurs connues du décalage de phase ϕ , ce qui ne donne que trois inconnues à résoudre dans l'équation des interférences, a , b et $\Delta\varphi$. Il suffit donc de trois interférogrammes pour résoudre l'équation. Une formulation générique d'un algorithme à N interférogrammes peut être obtenue en considérant le critère des moindres carrés. En 1984, Greivenkamp [7 [Generalized Data Reduction for Heterodyne Interferometry]] utilise cette approche. L'interférogramme est développé sous la forme

$$E_n = a_0 + a_1 \cos(\phi_n) + a_2 \sin(\phi_n) \quad n \in [1, 2, 3, \dots, N]$$

Les inconnues sont maintenant, $a_0 = a$, $a_1 = b \cos(\Delta\varphi)$ et $a_2 = b \sin(\Delta\varphi)$. Au sens des moindres carrés, les interférogrammes doivent minimiser le critère de proximité suivant

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^N [E_n - (a_0 + a_1 \cos(\phi_n) + a_2 \sin(\phi_n))]^2$$

sera minimum lorsque les dérivées partielles par rapport aux trois paramètres seront nulles :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_0} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2} = 0$$

Ceci conduit à un système linéaire de trois équations à trois inconnues. Nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n=N} a_0 + a_1 \cos(\phi_n) + a_2 \sin(\phi_n) &= \sum_{n=1}^{n=N} E_n \\ \sum_{n=1}^{n=N} a_0 \cos(\phi_n) + a_1 \cos^2(\phi_n) + a_2 \cos(\phi_n) \sin(\phi_n) &= \sum_{n=1}^{n=N} E_n \cos(\phi_n) \\ \sum_{n=1}^{n=N} a_0 \sin(\phi_n) + a_1 \cos(\phi_n) \sin(\phi_n) + a_2 \sin^2(\phi_n) &= \sum_{n=1}^{n=N} E_n \sin(\phi_n) \end{aligned}$$

soit aussi

$$A(\phi_n) X = B(E_n, \phi_n)$$

où

$$A(\phi_n) = \begin{pmatrix} N & \sum_{n=1}^{n=N} \cos(\phi_n) & \sum_{n=1}^{n=N} \sin(\phi_n) \\ \sum_{n=1}^{n=N} \cos(\phi_n) & \sum_{n=1}^{n=N} \cos^2(\phi_n) & \sum_{n=1}^{n=N} \cos(\phi_n) \sin(\phi_n) \\ \sum_{n=1}^{n=N} \sin(\phi_n) & \sum_{n=1}^{n=N} \cos(\phi_n) \sin(\phi_n) & \sum_{n=1}^{n=N} \sin^2(\phi_n) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$B(E_n, \phi_n) = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{n=N} E_n \\ \sum_{n=1}^{n=N} E_n \cos(\phi_n) \\ \sum_{n=1}^{n=N} E_n \sin(\phi_n) \end{pmatrix}$$

L'inversion donne

$$X = A^{-1}(\phi_n) B(E_n, \phi_n)$$

Par inversion de $A(\phi_n)$, on obtient a_0 , a_1 et a_2 et la phase optique par

$$\Delta \varphi = \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

En chaque point de l'interférogramme, l'amplitude de modulation est

$$b = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Si on choisit judicieusement le décalage de phase, la matrice $A(\phi_n)$ devient diagonale. En effet, si ϕ est un sous multiple de la période des franges, soit $\phi = 2\pi/N$ avec $\phi_n = (n-1)\phi = 2(n-1)\pi/N$, la relation qui donne $\Delta\phi$ devient simple :

$$\Delta\varphi = \arctan \left(\frac{\sum_{n=1}^{n=N} E_n \sin((n-1)\phi)}{\sum_{n=1}^{n=N} E_n \cos((n-1)\phi)} \right)$$

Avec $N = 4$ et $\phi = \pi/2$, on retrouve l'algorithme à 4 images vu précédemment :

$$\Delta\varphi = \arctan \left(\frac{E_4 - E_2}{E_1 - E_3} \right)$$

et pour $N = 3$ et $\phi = 2\pi/3$, on retrouve l'algorithme à 3 images [6 [Phase Evaluation Methods in Whole-Field Optical Measurement Techniques],8 [Optical Phase Measurement in Real Time]] :

$$\Delta\varphi = \arctan \left(\frac{3}{\sqrt{3}} \frac{E_3 - E_2}{2E_1 - E_2 - E_3} \right)$$

Les algorithmes construits par ce moyen n'ont malheureusement pas toujours un comportement optimal en présence de sources d'erreurs. C'est pourquoi des approches dédiées à ces problèmes ont été développées. La conception d'algorithmes de décalage de phase robustes aux erreurs aléatoires peut être envisagée en utilisant la théorie du maximum de vraisemblance, ou, pour les erreurs systématiques, en utilisant des combinaisons d'algorithmes pré-existants.

Par exemple, en 1983 J. Schwider [9 [Digital Wave-Front Measuring Interferometry : Some Systematic Error Sources]] montre qu'on peut calculer une moyenne de la phase optique en utilisant un algorithme classique. La stratégie consiste à évaluer la phase avec les $N-1$ premiers interférogrammes, puis ensuite avec les $N-1$ derniers et à calculer la moyenne des résultats. Considérons $N = 4$ et $\phi = \pi/2$, on a d'une part

$$\Delta\varphi_1 = \arctan \left(\frac{2E_2 - E_1 - E_3}{E_3 - E_1} \right)$$

et d'autre part

$$\Delta\varphi_2 = \arctan \left(\frac{2E_3 - E_2 - E_4}{E_4 - E_2} \right) - \frac{\pi}{4}$$

et la valeur moyenne est obtenue par

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)$$

Ce type d'algorithme est un peu moins sensible aux erreurs d'étalonnage de l'élément qui produit le décalage de phase.

Complément

Nous venons de voir, de façon non exhaustive, qu'il existe un très grand nombre d'algorithmes disponibles dans la littérature. Avant de choisir, l'utilisateur devra donc établir un cahier des charges des performances de l'évaluation de la phase ainsi que des sources de limitations de la précision les plus importantes. Le choix devra se porter vers le meilleur compromis **insensibilité/rapidité/simplicité**.

2.5. Modulation de phase sinusoïdale

Dans cette technique, la phase est modulée sinusoïdalement dans une gamme de fréquences de 10 Hz à quelques centaines de Hz [10 [Sinusoidal Phase Modulating Interferometer Using the Integrating-Bucket Method ,]]. La phase modulante s'écrit donc

$$\xi(x, y, t) = 2\pi f_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

où $\omega/2\pi$ est la fréquence de la modulation de phase, φ sa phase de synchronisation et $2\pi f_0$ son amplitude. Considérons toujours un profil de franges sinusoïdal, l'amplitude moyenne, le contraste et la phase étant constants. La dépendance spatiale est sous entendue, nous avons :

$$I(t) = a + b \cos(\Delta\varphi + 2\pi f_0 \sin(\omega t + \varphi))$$

Le signal est intégré successivement pendant les 4 quarts de la période $\Delta t = 2\pi/\omega$ de la modulation, ainsi

$$E_n = \frac{4}{\Delta T} \int_{(n-1)\Delta T/4}^{n\Delta T/4} I(t) dt$$

développons $I(t)$ en série de fonctions de Bessel de première espèce

$$I(t) = a + b \cos(\Delta\varphi) J_0(2\pi f_0) + 2b \cos(\Delta\varphi) \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(2\pi f_0) \cos(2n\omega t + 2n\varphi) - 2b \sin(\Delta\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(2\pi f_0) \sin((2n+1)\omega t + (2n+1)\varphi)$$

Écrivons le résultat de l'intégration temporelle comme

$$E_n = a + b A_n \cos(\Delta\varphi) + b B_n \sin(\Delta\varphi)$$

on a

$$A_n = J_0(2\pi f_0) + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2k}(2\pi f_0)}{2k} (\sin(kn\pi + 2k\varphi) - \sin(k(n-1)\pi + 2k\varphi))$$

$$B_n = -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2k+1}(2\pi f_0)}{2k+1} \cos((2k+1)n\pi/2 + (2k+1)\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2k+1}(2\pi f_0)}{2k+1} \cos((2k+1)(n-1)\pi/2 + (2k+1)\varphi)$$

et pour chaque interférogramme :

$$A_1 = A_3 = J_0(2\pi f_0) + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2k}(2\pi f_0)}{2k} (1 - (-1)^k) \sin(2k\varphi)$$

$$A_2 = A_4 = J_0(2\pi f_0) - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2k}(2\pi f_0)}{2k} (1 - (-1)^k) \sin(2k\varphi)$$

$$B_1 = -B_3 = \frac{-4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2k+1}(2\pi f_0)}{2k+1} ((-1)^k \sin((2k+1)\varphi) + \cos((2k+1)\varphi))$$

$$B_2 = -B_4 = \frac{-4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2k+1}(2\pi f_0)}{2k+1} ((-1)^k \sin((2k+1)\varphi) - \cos((2k+1)\varphi))$$

ce qui donne le système suivant

$$E_1 = a + b A_1 \cos(\Delta\varphi) + b B_1 \sin(\Delta\varphi)$$

$$E_2 = a + b A_2 \cos(\Delta\varphi) + b B_2 \sin(\Delta\varphi)$$

$$E_3 = a + b A_1 \cos(\Delta\varphi) - b B_1 \sin(\Delta\varphi)$$

$$E_4 = a + b A_2 \cos(\Delta\varphi) - b B_2 \sin(\Delta\varphi)$$

d'où on déduit

$$b \cos(\Delta\varphi) = \frac{E_1 - E_2 + E_3 - E_4}{2(A_1 - A_2)}$$

$$b \sin(\Delta\varphi) = \frac{E_1 + E_2 - E_3 - E_4}{2(B_1 + B_2)}$$

et la phase est obtenue par une fonction arctangente :

$$\Delta\varphi = \arctan\left(\alpha \frac{E_1 + E_2 - E_3 - E_4}{E_1 - E_2 + E_3 - E_4}\right) \quad \alpha = \frac{A_1 - A_2}{B_1 + B_2}$$

Pour la valeur de α , le calcul montre que :

$$A_1 - A_2 = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{4k+2}(2\pi f_0)}{4k+2} \sin((4k+2)\varphi)$$

$$B_1 + B_2 = \frac{-8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{J_{2k+1}(2\pi f_0)}{2k+1} \sin((2k+1)\varphi)$$

Une étude de l'algorithme en considérant un bruit additif sur les éclairissements intégrés conduit à montrer que l'influence du bruit est minimisée pour $2\pi f_0 = 2,45 \text{ rad}$ et $\varphi = 0,977 \text{ rad}$ [10 [Sinusoidal Phase Modulating Interferometer Using the Integrating-Bucket Method ,]]. Par

exemple, pour une acquisition temps réel avec une caméra fournissant 200 images /s sur une matrice de 256×256 pixels, la fréquence de modulation doit être de 50 Hz pour enregistrer un quart de période sur 2 ms.

Remarque

Cette méthode, bien que beaucoup plus calculatoire que les deux précédentes donne une mesure de très grande précision et il a été montré qu'elle est assez insensible aux différentes perturbations telles que fluctuations thermiques ou vibrations mécaniques de faible fréquence comparée à celle de la modulation.

2.6. Techniques de décalage de phase

La variation de phase peut être réalisée avec divers éléments optiques. Les techniques les plus utilisées sont :

- les transducteurs piézo-électriques
- les modulateurs électro-optiques
- les modulateurs acousto-optiques

Le **déphasage par transducteur piézo-électrique** consiste à coller un miroir sur le transducteur sur lequel on applique une tension. La tension déforme le piézo-électrique et le miroir se déplace, faisant ainsi varier finement la phase optique. Si le faisceau lumineux est réfléchi en incidence normale, un déplacement de $\lambda/8$ est suffisant pour réaliser un déphasage de $\pi/2$.

La figure 10 illustre cette méthode. Les tensions appliquées sur le cristal sont généralement de l'ordre de quelques dizaines de volts.

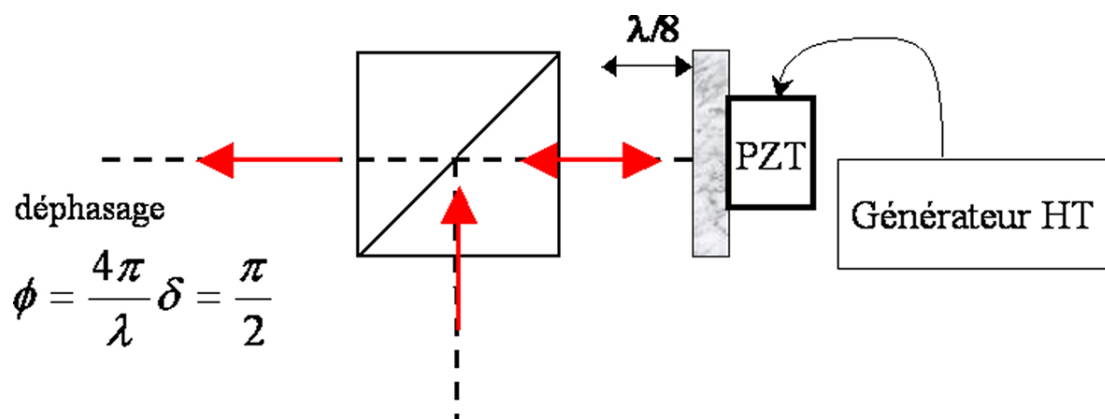


Figure 10 : Décalage de phase par transducteur piézoélectrique

Le cristal piézo-électrique est généralement piloté avec des marches de tension. Le pilotage en tension sinusoïdale est possible en évitant de s'approcher des fréquences de résonance car le cristal pourrait être sévèrement endommagé. Cette technique est certainement la plus utilisée dans les interféromètres commerciaux. Cependant, elle est très sensible aux perturbations environnementales telles que les vibrations transversales. En effet, de telles perturbations font vibrer le cristal et le miroir ce qui a pour effet de perturber le déphasage entre les interférogrammes.

Le **décalage de phase à l'aide d'un modulateur électro-optique** utilise la polarisation de la lumière. Ainsi, on doit nécessairement travailler avec un interféromètre à faisceaux polarisés. Le modulateur est placé dans l'interféromètre avant séparation des faisceaux et la polarisation de l'onde incidente est orientée à 45 des lignes neutres du modulateur. En appliquant une haute tension sur le cristal, une biréfringence est induite dans le matériaux ce qui induit une différence de phase optique entre les deux polarisations qui se propagent dans le milieu. Par exemple avec un cristal de niobate de lithium, $LiNbO_3$, en configuration transverse, la variation de phase est donnée par la relation suivante :

$$\phi = \frac{\pi}{\lambda} (n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}) L \frac{V}{d}$$

où V est la tension appliquée, L la longueur du cristal, d son épaisseur, n_o, n_e sont les indices ordinaires et extraordinaires du cristal et r_{13}, r_{33} sont des coefficients du tenseur électro-optique :

$$|r| = \begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs des coefficients sont : $r_{13} = 8,10 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ et $r_{33} = 30,4 \times 10^{-12} \text{ m/V}$. Généralement, les sensibilités sont de l'ordre de $\phi = 1,5 \times V \text{ mrad}$ pour des longueurs d'ondes visibles. La figure 11 schématise la configuration du modulateur. Le faisceau incident arrive polarisé rectilignement dans le plan (OXZ).

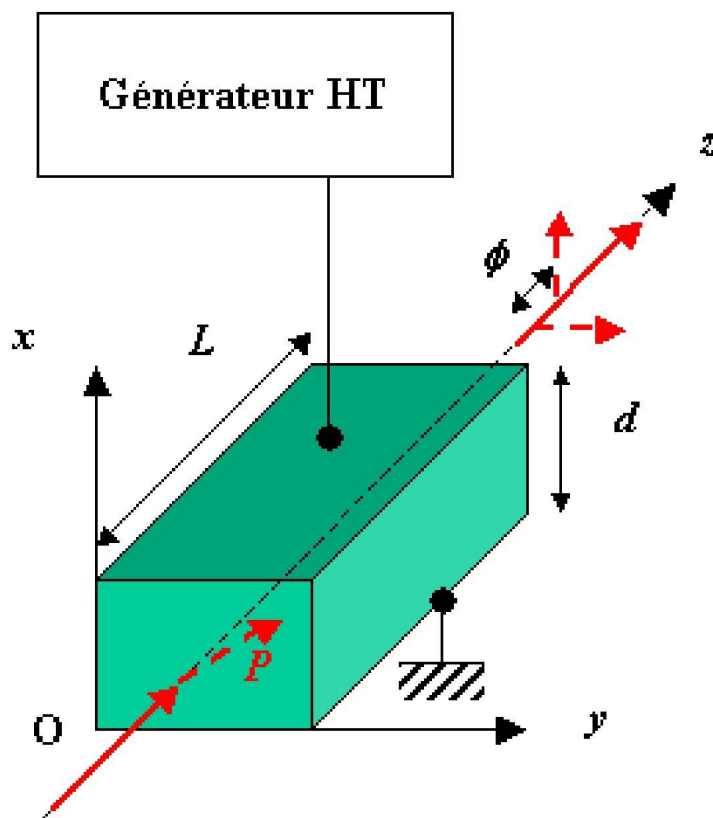


Figure 11 : Cristal LiNbO3 en configuration transverse

Le cristal peut être piloté avec des marches de tension (décalage de phase par marche) ou une tension sinusoïdale (modulation sinusoïdale) avec une fréquence de plusieurs centaines de hertz.

Dans le cas où on utilise un **crystal acousto-optique** (TeO_2 , KRS_5 , HgS), un cristal piézo-électrique génère une onde acoustique de longueur d'onde λ_{ac} dans le milieu d'indice optique n . Cette onde acoustique induit une variation d'indice par effet photo-élastique. Ce réseau d'indice se déplace à la vitesse de l'onde acoustique mais reste statique en apparence pour l'onde optique qui est alors diffractée. Dans le régime dit de Bragg, lorsque la longueur d'onde acoustique est beaucoup plus faible que l'épaisseur du cristal, pour un angle d'incidence tel que

$$\sin(\theta_B) = \frac{\lambda}{2n\lambda_{ac}}$$

le faisceau lumineux diffracte sur un seul ordre et sa fréquence est décalée d'une quantité égale à la fréquence de l'onde acoustique, f_{ac} . La figure 12 illustre la configuration du modulateur.

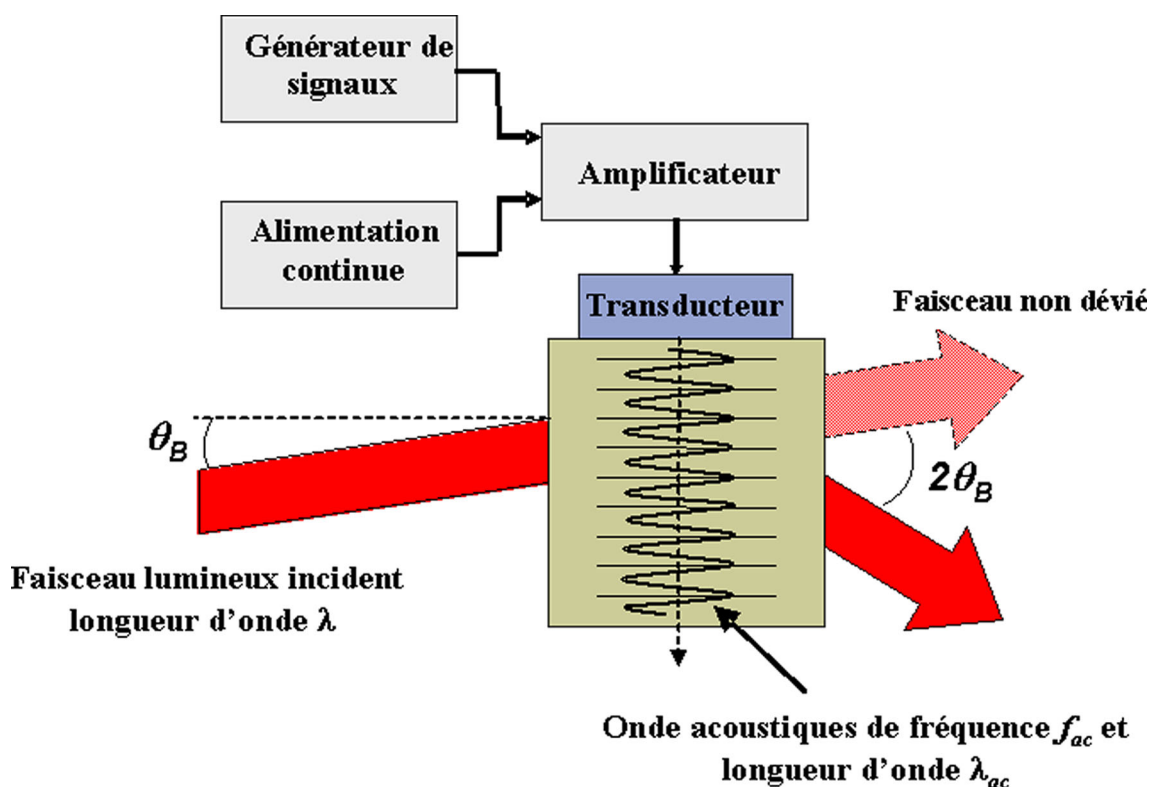


Figure 12 : Diffraction acousto-optique

Lorsque les interférences ont lieu entre un faisceau diffracté et un faisceau non diffracté, le cosinus du signal contient le terme de modulation temporelle donné par $2\pi f_{ac}t$. La technique du « **phase bucket** » peut alors être appliquée. Les fréquences acoustiques généralement utilisées sont de quelques Mhz, jusqu'à plus de 100 Mhz pour certains modulateurs

Généralement, on utilise 2 modulateurs, un sur chaque faisceau, avec une légère différence de fréquence Δf_{ac} de sorte que la modulation du cosinus s'écrit $2\pi\Delta f_{ac}t$ et devient compatible avec les cadences d'acquisitions usuelles des caméras.

2.7. Illustrations

Ce paragraphe propose une illustration graphique de la méthode du décalage de phase par marche. Considérons un interférogramme avec une figure de franges telle que celle représentée sur la figure 13.

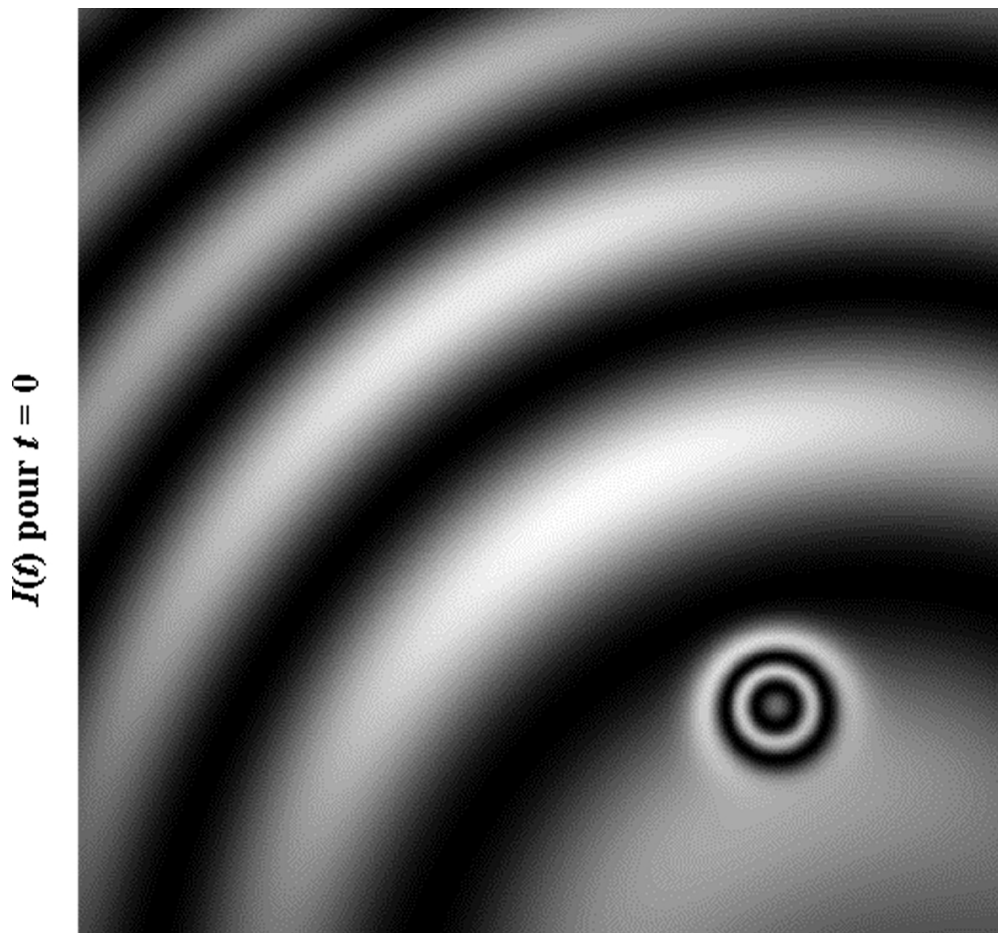


Figure 13 : Interférogramme instantané

Appliquons maintenant la méthode du décalage de phase avec 4 marches de phase déphasée de $\pi/2$, réalisées avec un dispositif à transducteur piézoélectrique par exemple. La figure 14 présente les 4 interférogrammes déphasés obtenus avec respectivement un décalage de phase de $0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$.

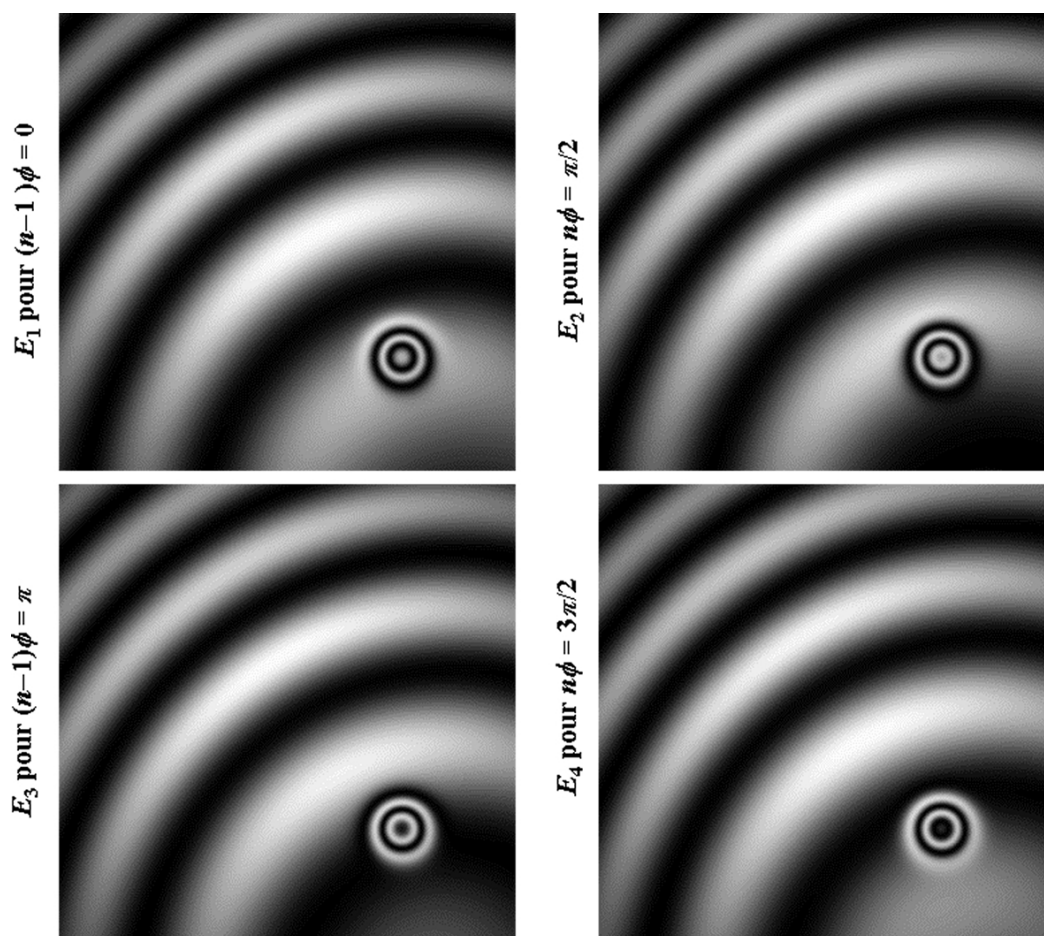


Figure 14 : Interférogrammes déphasés

Comme nous l'avons vu précédemment, la phase est calculée par la relation suivante :

$$\Delta \varphi = \arctan \left(\frac{E_4 - E_2}{E_1 - E_3} \right)$$

La figure 15 montre le résultat obtenu après application de l'algorithme avec les 4 interférogrammes déphasés.

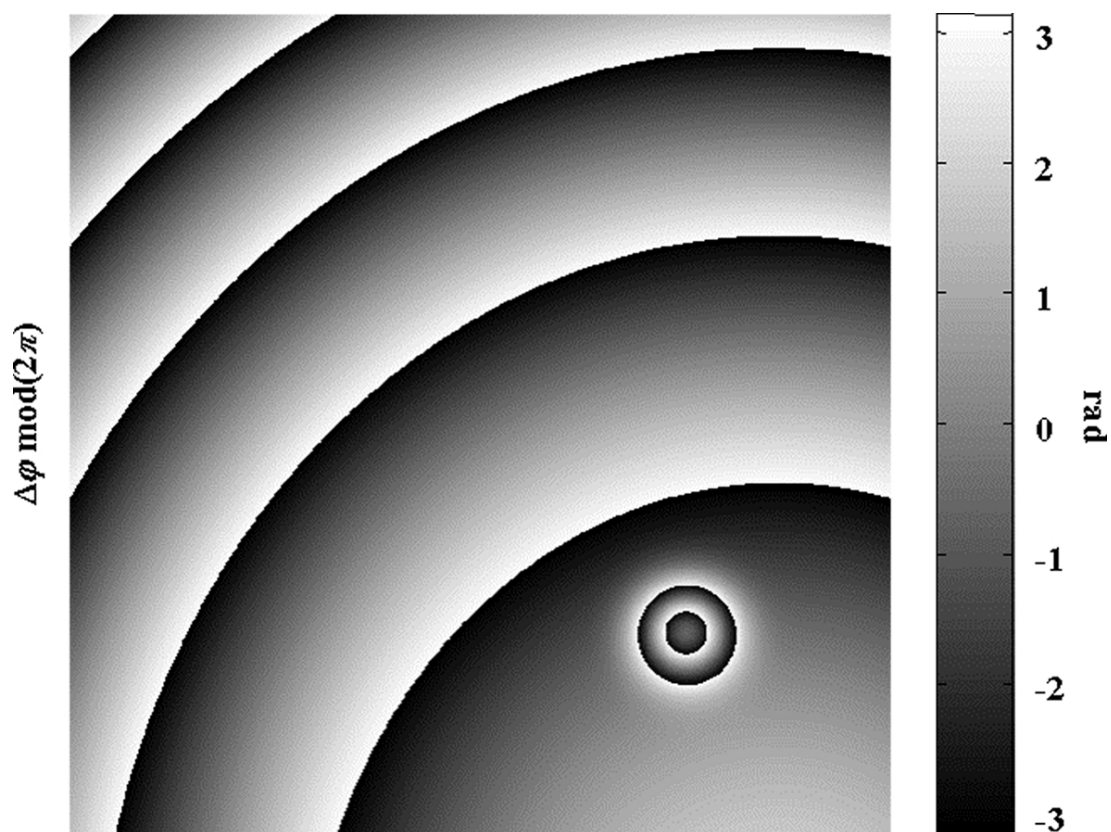


Figure 15 : Phase estimée avec les 4 interférogrammes déphasés

La phase est obtenue modulo 2π , ce qui apparaît avec les sauts de phase observés sur la figure. Lorsqu'on applique un algorithme de déroulement de phase, on obtient le résultat représenté sur la figure 16.

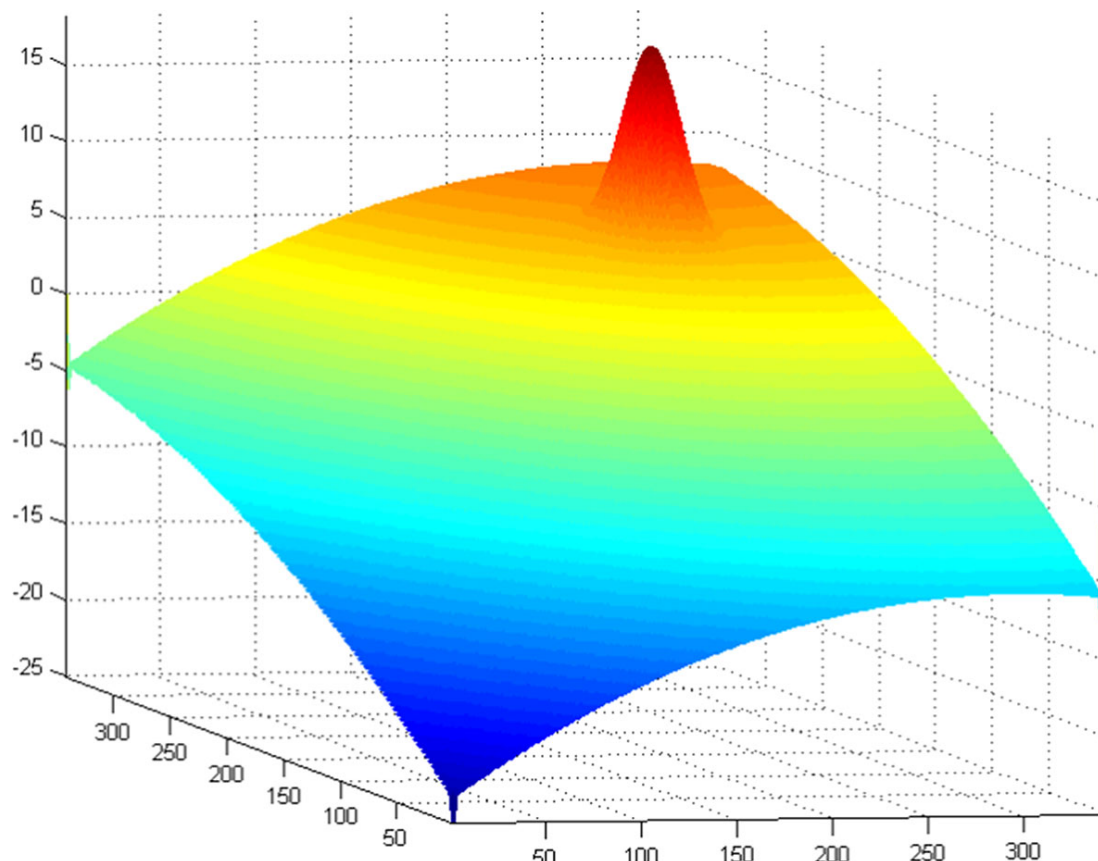


Figure 16 : Phase déroulée (« unwrapped »)

Le lecteur notera que le niveau 0 de la mesure de phase est arbitraire et qu'il dépend du point de l'image à partir duquel l'algorithme de déroulement de phase commence à travailler. Le niveau peut donc être ajusté si il est possible de connaître le point de la carte de phase réellement à 0.

3. Démodulation de phase avec porteuse spatiale

3.1. Démodulation par transformée de Fourier

Cette méthode, apparue en 1982 [11 [Fourier-transform Method of Fringe-pattern Analysis for Computer-based Topography and Interferometry,,]], avait été utilisée dans un premier temps à une dimension avec les algorithmes FFT unidimensionnels, puis elle a évolué vers sa forme bidimensionnelle globale avec l'apparition des algorithmes FFT2 rapides. Dans les deux cas, après transformée de Fourier de la figure de franges, on obtient un spectre tri-modal symétrique par rapport à l'origine.

La méthode présente le gros avantage de réduire considérablement le niveau de bruit de la carte de phase démodulée mais dégrade la résolution spatiale. La modulation de phase est purement spatiale [11 [Fourier-transform Method of Fringe-pattern Analysis for Computer-based Topography and Interferometry,,]] :

$$\zeta(x, y, t) = 2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y$$

On peut évidemment envisager le cas $u_0 = 0$ ou le cas $v_0 = 0$, le principe de la méthode reste valable. Dans la suite on considérera ce dernier cas.

Le choix de la fréquence porteuse doit tenir compte du nombre de pixels de la caméra et des périodes d'échantillonnage en vertical et en horizontal sur la matrice CCD. Si on note p_x et p_y les tailles des pixels sur la CCD, alors les fréquences d'échantillonnage sont $f_x = 1/p_x$ et $f_y = 1/p_y$. Dans la pratique, il faudrait également tenir compte de la **Fonction de Transfert de Modulation** (FTM) de l'optique d'imagerie associée à la matrice CCD.

La fréquence porteuse doit respecter le théorème de Shannon : $u_0 < f_x/2$ et $v_0 < f_y/2$. Dans le plan de Fourier de l'interférogramme, l'écart fréquentiel entre deux valeurs spectrales est de f_x/N en horizontal et f_y/M en vertical où N et M correspondent au nombre de pixels de la matrice image (sans zéro-padding de l'interférogramme).

Si on souhaite avoir une porteuse spatiale centrée sur $f_x/4$ (resp. $f_y/4$), c'est à dire au milieu de la fenêtre de fréquences positives, alors la période spatiale de la porteuse doit être de $1/u_0 = 4p_x$ (resp. $1/v_0 = 4p_y$) et chaque frange couvre 4 pixels sur la caméra, le nombre total de franges horizontales étant donc de $N/4$ (resp. $M/4$).

La figure de franges enregistrée, sur un détecteur matriciel s'écrit :

$$E(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta \varphi(x, y) + 2\pi u_0 x)$$

Ré-écrivons cette expression en faisant apparaître des exponentielles complexes et en tenant compte de la dépendance spatiale :

$$E(x, y) = a(x, y) + \frac{1}{2} b(x, y) \exp(i \Delta \varphi(x, y)) \exp(2i \pi u_0 x) + \frac{1}{2} b(x, y) \exp(-i \Delta \varphi(x, y)) \exp(-2i \pi u_0 x)$$

Posons $c(x, y) = \frac{1}{2} b(x, y) \exp(i \Delta \varphi(x, y))$ et appliquons la transformée de Fourier à l'image enregistrée :

$$\tilde{E}(u, v) = \tilde{A}(u, v) + \tilde{C}(u - u_0, v) + \tilde{\tilde{C}}(u + u_0, v)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{A}(u, v) &= TF[a(x, y)](u, v) \\ \tilde{C}(u, v) &= TF[c(x, y)](u, v) \end{aligned}$$

et $\tilde{\tilde{C}}(u, v)$ est le complexe conjugué de $\tilde{C}(u, v)$

Si les spectres de fréquences spatiales sont étroits par rapport à la fréquence porteuse u_0 , on observe trois lobes bien séparés dans le plan de Fourier de l'interférogramme. Les deux lobes symétriques centrés sur $+u_0$ et $-u_0$ contiennent la même information de phase. Il sont simplement complexes conjugués l'un de l'autre. Le filtrage du lobe centré sur la fréquence $+u_0$, par un filtre numérique passe bande bidimensionnel centré en $+u_0$, permet de ne conserver que l'information de phase qui nous intéresse et conduit donc aussi à un filtrage de la composante continue.

Notons $\tilde{H}(u, v)$ la fonction de transfert du filtre. Le filtre est appliqué sur le spectre par multiplication de la transformée de Fourier de l'image avec la fonction de transfert. Nous avons :

$$\tilde{E}_f(u, v) = \tilde{E}(u, v) \tilde{H}(u, v) \simeq \tilde{C}(u - u_0, v)$$

Le filtre peut être décrit simplement par une **fonction de type « porte à 2 dimensions »** de largeurs Δu et Δv :

$$\tilde{H}(u, v) = \begin{cases} 1 & \{u, v\} \in [u_0 - \Delta u/2, u_0 + \Delta u/2] \times [-\Delta v/2, \Delta v/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La transformée de Fourier inverse appliquée à $\tilde{E}_f(u, v)$ conduit à

$$c_f(x, y) = \frac{1}{2} b(x, y) \exp(i \Delta \varphi(x, y)) \exp(2i \pi u_0 x)$$

Multiplions $c_f(x, y)$ par $\exp(-2i \pi u_0 x)$ on obtient

$$\tilde{c}(x, y) \simeq \frac{1}{2} b(x, y) \exp(i \Delta \varphi(x, y))$$

d'où on déduit la phase optique par une fonction arctangente

$$\Delta \varphi(x, y) = \arctan\left(\frac{\Im(\hat{c})}{\Re(\hat{c})}\right)$$

Le lecteur remarquera que le filtrage peut également être implémenté par convolution dans l'espace de l'interférogramme. En effet, puisque

$$\tilde{E}_f(u, v) = \tilde{E}(u, v) \tilde{H}(u, v) \simeq \tilde{C}(u - u_0, v)$$

nous avons aussi dans l'espace direct

$$c_f(x, y) = E(x, y) * h(x, y)$$

où

$$h(x, y) = \text{TF}^{-1}[\tilde{H}(u, v)](x, y)$$

donnant

$$h(x, y) = \Delta_u \Delta_v \exp(-2i \pi u_0 x) \text{sinc}(\pi \Delta_u x) \text{sinc}(\pi \Delta_v y)$$

Le filtrage numérique pourra être implémenté par un filtre linéaire à réponse impulsionnelle finie à 2 dimensions de taille $K \times K$ dont la réponse impulsionnelle est :

$$h(k, l) = \begin{cases} p_x p_y \Delta_u \Delta_v \exp(-2i \pi u_0 p_x k) \text{sinc}(\pi \Delta_u p_x k) \text{sinc}(\pi \Delta_v p_y l) \\ 0 & \text{pour } \{k, l\} \in [-L, +L] \times [-L, +L] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $L = (K - 1)/2$.

La résolution spatiale de la méthode est fortement affectée par le choix de la largeur du filtre. Si on note (R_x, R_y) les largeurs au premier zéro de la réponse impulsionnelle du filtre, alors la résolution spatiale est donnée par :

$$R_x = 1/\Delta_u$$

$$R_y = 1/\Delta_v$$

On constate donc qu'on a intérêt à augmenter le plus possible la bande passante du filtre tout en s'assurant qu'il n'y a pas de contributions des autres lobes lors du filtrage.

Le lecteur remarquera que bien que les deux formulations (filtrage spectral et filtrage spatial) soient mathématiquement équivalentes, la mise en œuvre numérique donnera des résultats différents.

En effet, la synthèse du filtre numérique RIF 2D conduit nécessairement à la troncature du nombre de coefficients puisque la réponse impulsionnelle doit être finie. Cette troncature a pour conséquence l'apparition d'ondulations dans la bande passante et la bande atténuée du filtre. Ainsi, des zones spectrales indésirables peuvent coïncider avec les ondulations, ce qui revient à obtenir un filtrage moins sélectif que la solution qui consiste à couper la zone spectrale directement dans le plan de Fourier.

Cette méthode est très robuste si le rapport signal/bruit dans l'interférogramme biaisé est très bon, dans le cas contraire, bien que le filtrage participe activement à la réduction du bruit, il est possible de rencontrer des problèmes liés à l'ouverture de franges dans la carte de phase calculée. C'est d'autant plus vrai si la modulation des franges constitue un bruit multiplicatif, comme c'est le cas en interférométrie speckle par exemple. Dans ce cas l'opération de déroulement de phase (« unwrapping ») s'avère délicate.

Remarque

Ces formulations algorithmiques supposent que l'on connaisse parfaitement la valeur de la fréquence porteuse. Cette supposition est facile à mettre en place si l'interférogramme n'est pas trop bruité où si la modulation des franges reste parfaitement uniforme dans l'image. Dans le cas contraire, la suppression de la porteuse n'est pas toujours aisée et une mauvaise estimation peut conduire à la présence de termes de basculements de la phase optique. La sélection du lobe spectral nécessite une interaction forte avec l'utilisateur pour que la sélection soit fiable. L'automatisation totale du traitement n'est donc pas chose aisée.

3.2. Décalage de phase à porteuse spatiale

Dans cette méthode, on introduit toujours une fréquence porteuse spatiale :

$$\zeta(x, y, t) = 2\pi v_0 y \text{ ou } \zeta(x, y, t) = 2\pi u_0 x$$

dont la composante est parfaitement connue d'un pixel à son voisin. Dans le cas précédent, nous cherchions à augmenter la fréquence porteuse jusqu'à la limite admissible sans nous préoccuper de sa valeur du moment que l'on pouvait séparer les lobes dans le plan de Fourier.

Maintenant, cette méthode utilise une porteuse qui doit être bien connue, de sorte que la variation de phase sur une distance de K pixels contigus (horizontaux ou verticaux) soit égale à 2π [12 [The Architecture of a Multipurpose Fringe Pattern Analysis System]]. On fait donc l'hypothèse que sur un voisinage de K pixels, la phase $\Delta\varphi$ et les paramètres de l'interférogramme $a(x, y)$ et $b(x, y)$ restent constants.

Considérons le cas où $\zeta(x, y, t) = 2\pi u_0 x$ et un déphasage de $2\pi/L$ entre deux pixels consécutifs, on a $2\pi u_0 p_x = 2\pi/L$ soit $1/u_0 = L p_x$:

on a donc L pixels par franges.

Le principe de la méthode est d'échantillonner localement le signal sinusoïdal en K points représentés par K pixels contigus, avec un déphasage de $2\pi/L$ entre chaque pixels consécutif.

A partir d'une image vidéo unique, on synthétise, par sous échantillonnage spatial, K images secondaires en ne considérant pour chaque image que le $k^{\text{ème}}$ pixel du jeu de K pixels. Si la matrice image initiale contient M lignes et N colonnes, alors chaque image secondaire contiendra M lignes et $1 + (N - 1)/K$ colonnes.

Avec une porteuse orientée suivant x , l'interférogramme s'écrit en fonction de la position du pixel :

$$\begin{aligned} E(x, y) &= a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\varphi(x, y) + 2\pi u_0 x) \\ E(x + p_x, y) &\approx a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\varphi(x, y) + 2\pi u_0 x + 2\pi/L) \\ E(x + 2p_x, y) &\approx a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\varphi(x, y) + 2\pi u_0 x + 4\pi/L) \\ &\vdots \\ E(x + Mp_x, y) &\approx a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\varphi(x, y) + 2\pi u_0 x + 2(K-1)\pi/L) \end{aligned}$$

Avec les pixels de $E(x, y)$, $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ par pas de Kp_x on forme l'image E_1 ;

avec les pixels de $E(x, y)$, $x \in [x_{\min} + p_x, x_{\max}]$ par pas de Kp_x , on forme l'image E_2 ; etc. ;

avec les pixels de $E(x, y)$, $x \in [x_{\min} + (K - 1)p_x, x_{\max}]$ par pas de Kp_x , on forme l'image E_K ;

La figure 17 illustre le principe de sélection des pixels selon chaque ligne de l'interférogramme primaire.

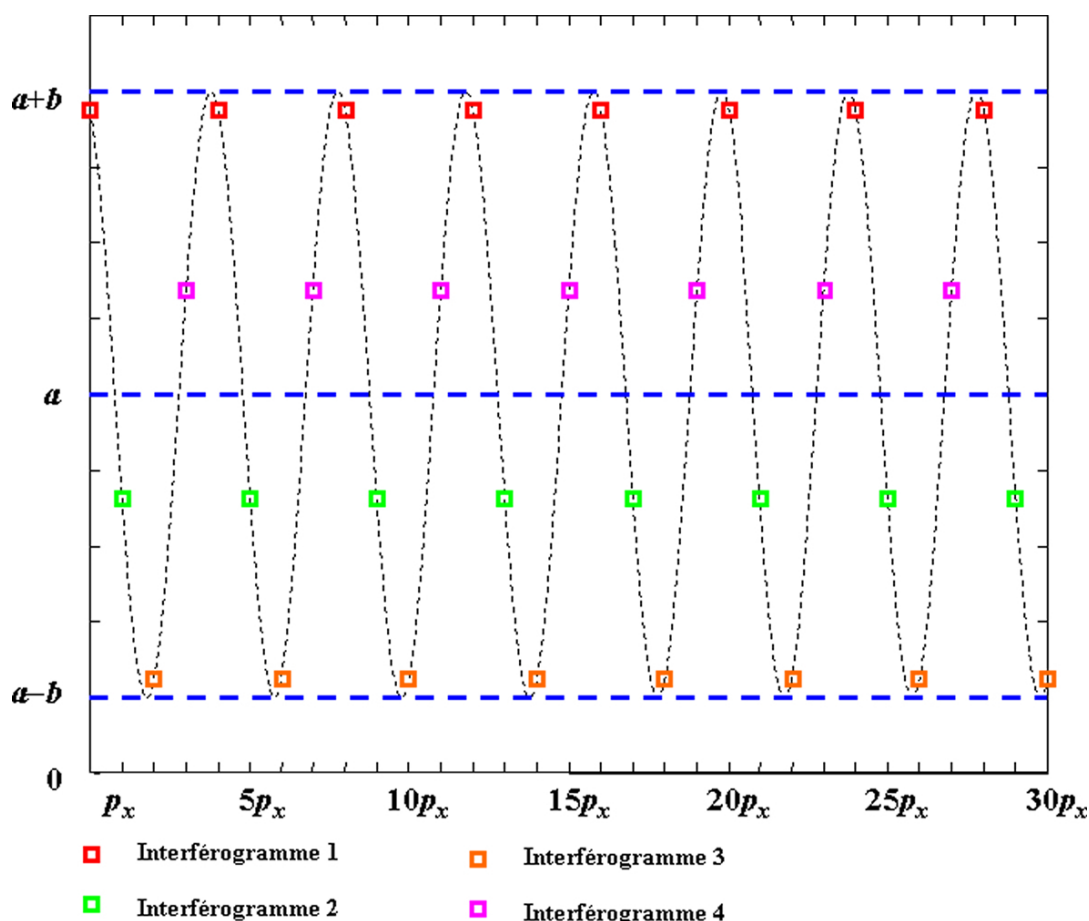


Figure 17 : Principe de sélection des pixels

Par exemple, prenons le cas où $K = 3$ et $L = 3$, on a $2\pi u_0 p_x = 2\pi/3$ soit $u_0 = 1/3 p_x$, c'est à dire 3 pixels par franges. Pour les images secondaires, nous avons

$$\begin{array}{ll}
 E_1 = a + b \cos(\Delta \varphi + 2\pi u_0 x) & \text{obtenu avec } E(x, y) \\
 E_2 = a + b \cos(\Delta \varphi + 2\pi u_0 x + 2\pi/3) & \text{obtenu avec } E(x + p_x, y) \\
 E_3 = a + b \cos(\Delta \varphi + 2\pi u_0 x + 4\pi/3) & \text{obtenu avec } E(x + 2p_x, y)
 \end{array}$$

et la phase recherchée est donnée modulo 2π par

$$\Delta \varphi + 2\pi u_0 x = \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}} \frac{E_3 - E_2}{2E_1 - E_2 - E_3}\right)$$

La phase est ensuite déroulée et on enlève le terme lié à la porteuse spatiale.

3.3. Démodulation synchrone spatiale

La méthode est similaire à une démodulation synchrone classique, avec la particularité qu'une fréquence porteuse est introduite dans la figure de franges. Pour une porteuse horizontale, l'interférogramme biaisé, enregistré par le détecteur matriciel, s'écrit également

$$E(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta \varphi(x, y) + 2\pi u_0 x)$$

La démodulation de phase synchrone spatiale consiste à multiplier, dans le domaine spatial (x, y) , l'interférogramme biaisé avec une porteuse de même fréquence, mais sans terme continu :

- d'une part en phase avec l'interférogramme [13 [Interferometric Phase Measurement Using spatial Synchronous Detection]]
- d'autre part en quadrature avec l'interférogramme [13 [Interferometric Phase Measurement Using spatial Synchronous Detection]]

Considérons une porteuse spatiale de même fréquence que l'interférogramme et en phase :

$$P(x, y) = \cos(2\pi u_0 x)$$

et la même porteuse en quadrature

$$Q(x, y) = \sin(2\pi u_0 x)$$

La multiplication de $E(x, y)$ avec $P(x, y)$ donne

$$\begin{aligned}
 EP(x, y) &= a(x, y) \cos(2\pi u_0 x) + \frac{1}{2} b(x, y) \cos(\Delta \varphi(x, y) + 4\pi u_0 x) \\
 &\quad + \frac{1}{2} b(x, y) \cos(\Delta \varphi(x, y))
 \end{aligned}$$

$EP(x, y)$ est composé de trois termes avec haute fréquence spatiale ($2\pi u_0 x$ et $4\pi u_0 x$) et d'un terme basse fréquence qui comporte l'information sur la phase recherchée.

Par filtrage spatial de EP à l'aide d'un filtre de type passe bas centré sur la fréquence $(u, v) = (0, 0)$ et de largeurs Δu et Δv dont la fonction de transfert est :

$$\tilde{H}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & \{u, v\} \in [-\Delta u/2, +\Delta u/2] \times [-\Delta v/2, \Delta v/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{pmatrix}$$

et la réponse impulsionnelle est :

$$h(x, y) = \Delta_u \Delta_v \operatorname{sinc}(\pi \Delta_u x) \operatorname{sinc}(\pi \Delta_v y)$$

il restera

$$M_1(x, y) = EP(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{2} b(x, y) \cos(\Delta \varphi(x, y))$$

On applique la même procédure à l'interférogramme biaisé multiplié par la porteuse en quadrature,

$$EQ(x, y) = a(x, y) \sin(2\pi u_0 x) + \frac{1}{2} b(x, y) \sin(\Delta \varphi(x, y) + 4\pi u_0 x) \\ + \frac{1}{2} b(x, y) \sin(\Delta \varphi(x, y))$$

et après filtrage

$$M_2(x, y) = EQ(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{2} b(x, y) \sin(\Delta \varphi(x, y))$$

La phase est donc obtenue par une fonction arctangente :

$$\Delta \varphi = \arctan\left(\frac{M_2(x, y)}{M_1(x, y)}\right)$$

et l'amplitude de la modulation des franges est donnée par :

$$b(x, y) = 4\sqrt{M_1^2(x, y) + M_2^2(x, y)}$$

Le filtre passe bas doit avoir la bande passante suffisante pour conserver le spectre utile et il ne doit pas être trop large pour ne pas inclure des fréquences spatiales indésirables des lobes spectraux.

3.4. Illustrations

Reprenons l'interférogramme de la figure 13. Cet interférogramme est dit « **non biaisé** » en ce sens qu'il ne contient pas de porteuse spatiale volontairement introduite.

Introduisons maintenant la porteuse spatiale dans l'interféromètre, telle que la fréquence spatiale soit égale à $u_0 = 1/4p_x$. L'interférogramme biaisé est observé sur la figure 18.

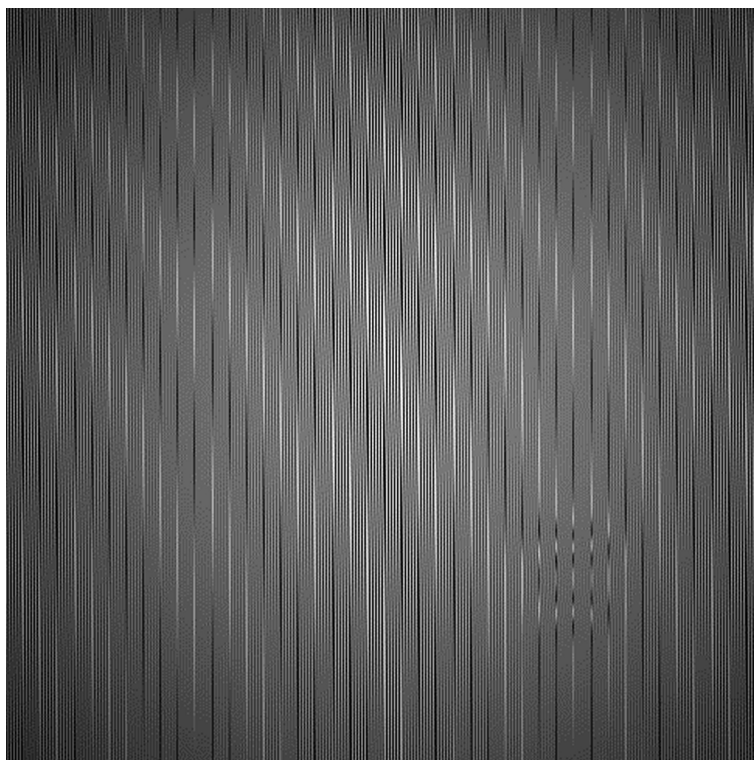


Figure 18 : Interférogramme biaisé

La figure 19 montre le spectre de l'interférogramme biaisé. On observe la composition tri-modale et la zone utile à sélectionner est encadrée en rouge.

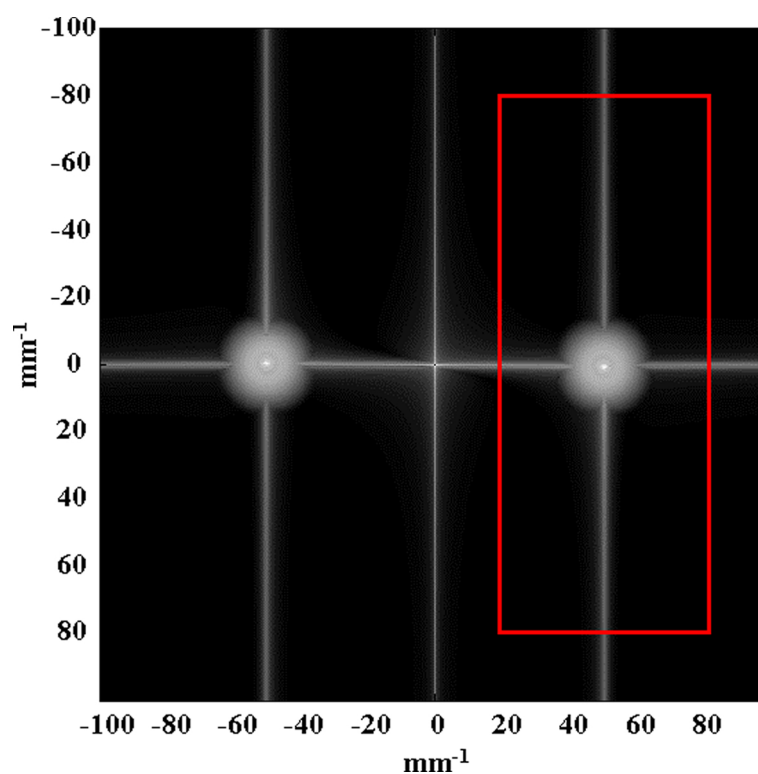


Figure 19 : Spectre de l'interférogramme biaisé

La zone utilisée étant définie, le masque de filtrage numérique $\tilde{H}(u, v)$ est construit en affectant la valeur 1 à la zone utile et 0 à la zone spectrale à éliminer. La figure 20 montre le masque de filtrage du spectre de la figure 19.

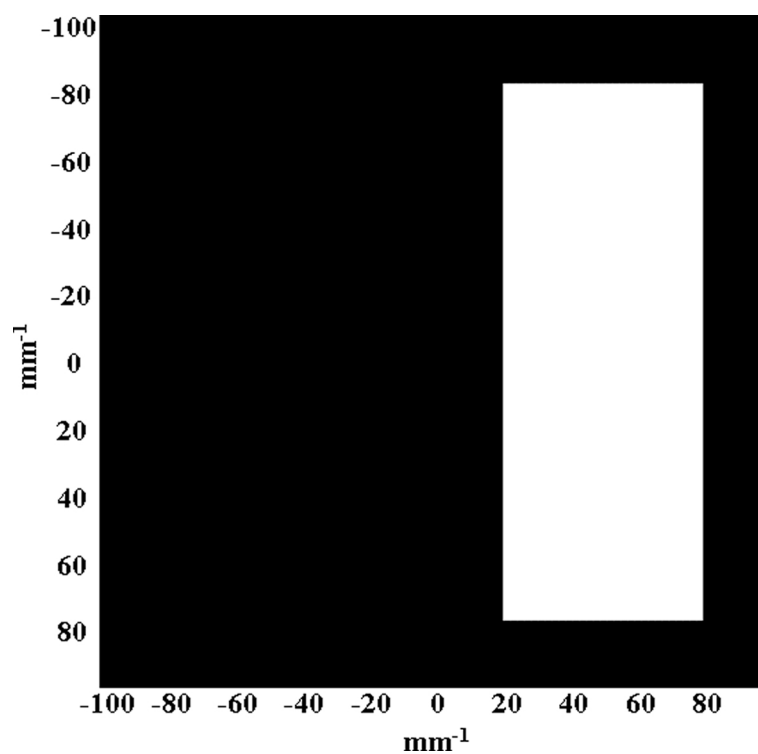


Figure 20 : Masque de filtrage spectral

La figure 21 montre la phase calculée modulo 2π après application de la méthode décrite ci dessus.

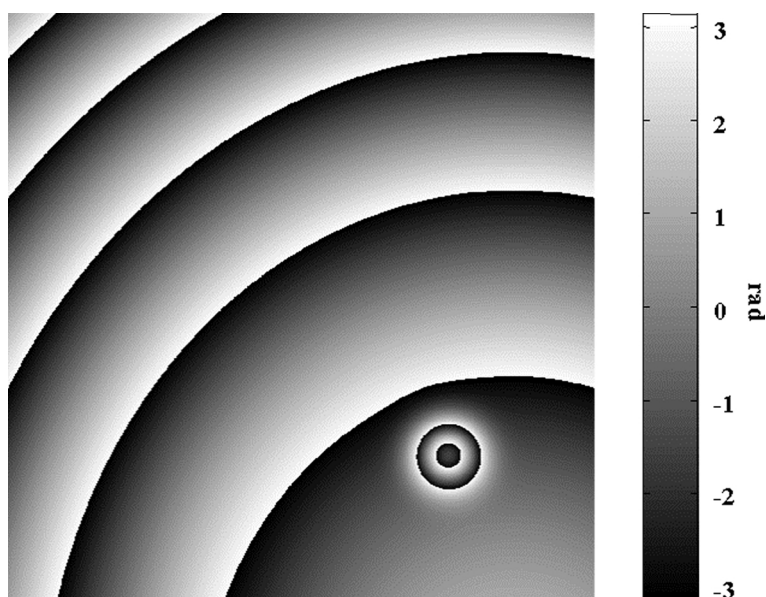


Figure 21 : Phase calculée après application de la méthode

Puisque la fréquence spatiale a été réglée telle que $u_0 = 1/4p_x$, il est aussi possible d'appliquer la méthode de décalage de phase spatial avec 4 interférogrammes secondaires extraits de l'interférogramme biaisé. La figure 22 montre les 4 interférogrammes.

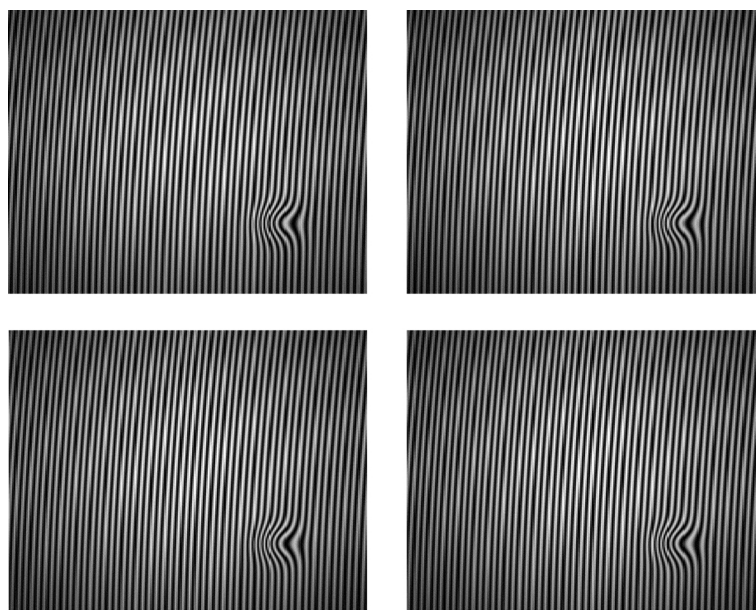


Figure 22 : Interférogrammes extraits de l'interférogramme primaire

La phase est estimée avec un algorithme à 4 images tel que décrit auparavant. Le résultat est donné sur la figure 23.

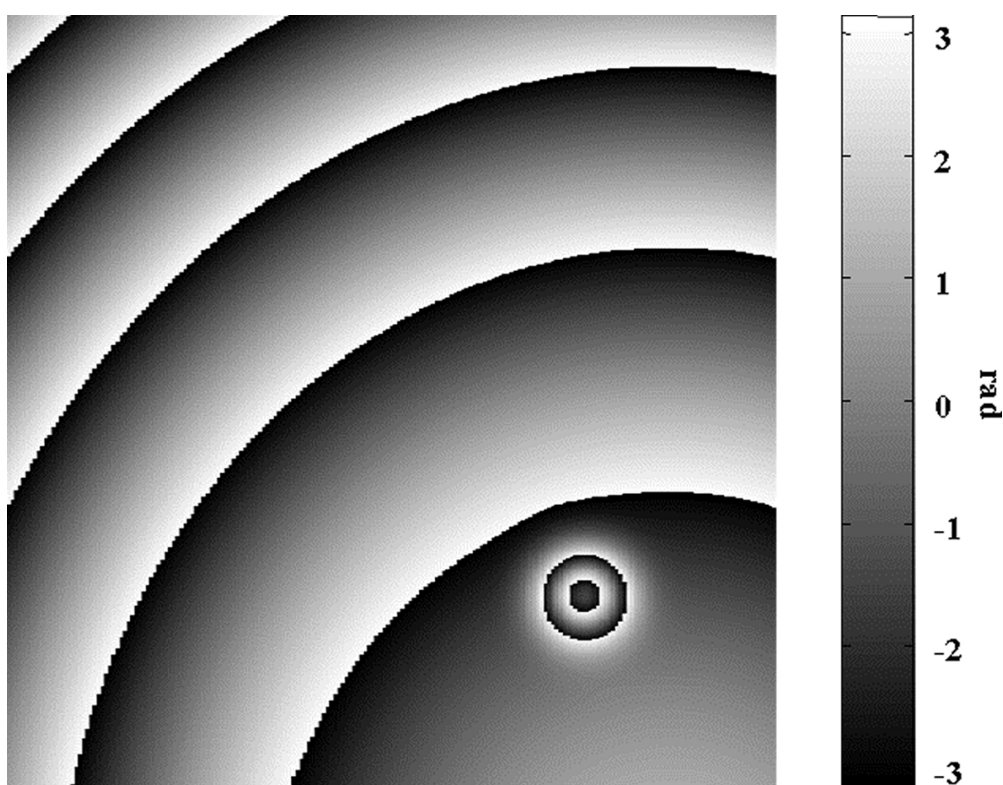


Figure 23 : Phase estimée par décalage de phase spatial

Après déroulement de phase, les trois profils de la carte de phase sont présentés sur la figure 24.

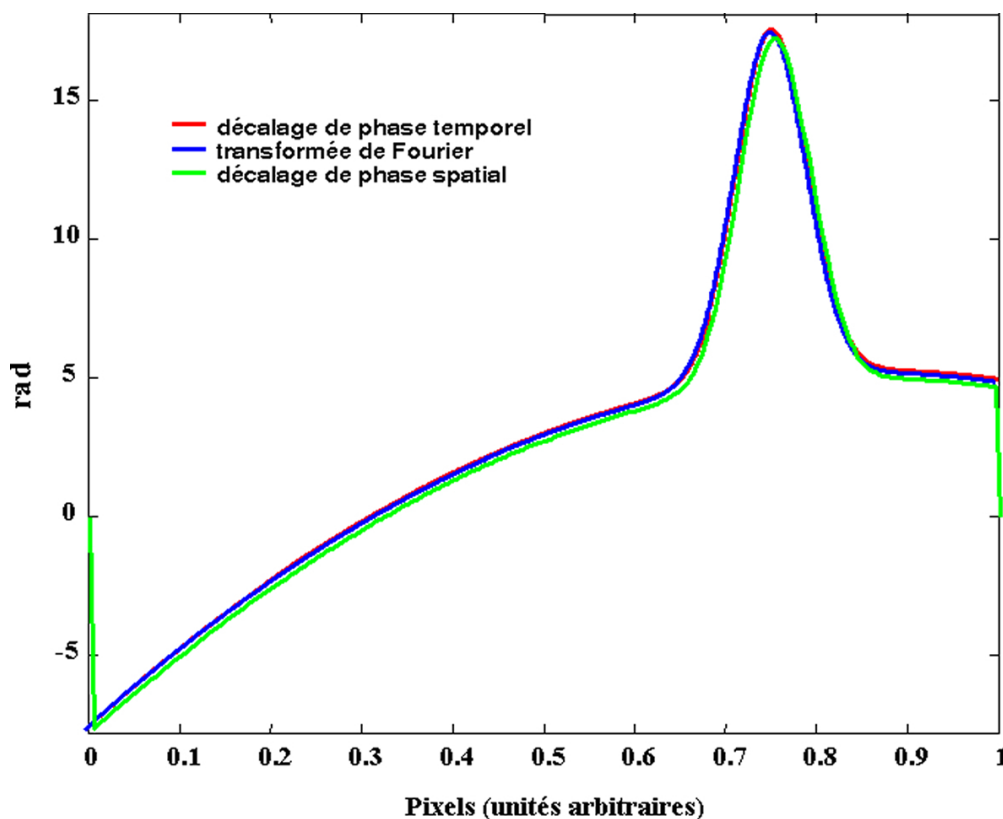


Figure 24 : Phase estimée par décalage de phase spatial

On note la très bonne concordance des trois profils.

3.5. Techniques de modulation spatiale de phase

La porteuse spatiale est introduite la plupart du temps par un basculement contrôlé de l'une des surfaces d'onde de l'interféromètre, il est alors possible de choisir l'orientation de la porteuse (x , y ou les deux).

On peut également utiliser des réseaux diffractifs qui introduisent un basculement des ondes diffractées. Le réseau est défini en fonction de la fréquence spatiale souhaitée pour la porteuse.

III. Etude de cas

Parmi les applications possibles des techniques de démodulation de franges, nous avons choisi d'illustrer concrètement le cas de **l'interférométrie de speckle** [14 [Holographic and speckle interferometry],15 [Phase Shifting Speckle Interferometry]]. Cette méthode est extrêmement intéressante pour étudier le comportement de structures ou d'assemblages mécaniques soumis à des sollicitations telles que chargements mécanique, pneumatique, thermique, acoustique, etc...

Le phénomène de speckle, connu aussi sous le nom de **granularité laser**, apparaît lorsqu'on éclaire des surfaces naturellement rugueuses avec une lumière spatialement et temporellement cohérente (laser typiquement).

Les propriétés statistiques d'un speckle dépendent en général d'une part de la **cohérence du faisceau incident** et d'autre part des **statistiques de la surface diffusante** (ou du milieu). Dans le cas où le speckle est produit par une lumière très cohérente éclairant une surface diffusante de grande taille, les statistiques du speckle ne dépendent pas des propriétés de la surface et on parle de **figure de speckle normale**. Cependant, d'une manière générale, les statistiques du speckle dépendent de la cohérence de la lumière et de la nature du diffuseur.

Le principe de l'interférométrie speckle est d'enregistrer non seulement l'amplitude du speckle mais également la variation de phase avant et après déformation de l'objet. Ce codage est basé sur la superposition cohérente d'une figure de speckle avec une onde de référence sans speckle ou bien avec une autre onde speckle issue du même objet ou d'un autre objet de référence.

1. Dispositif expérimental

Considérons la figure 25 qui montre un dispositif interférométrique speckle pour étudier l'étanchéité d'un connecteur industriel de surface $15 \times 23 \text{ mm}^2$.

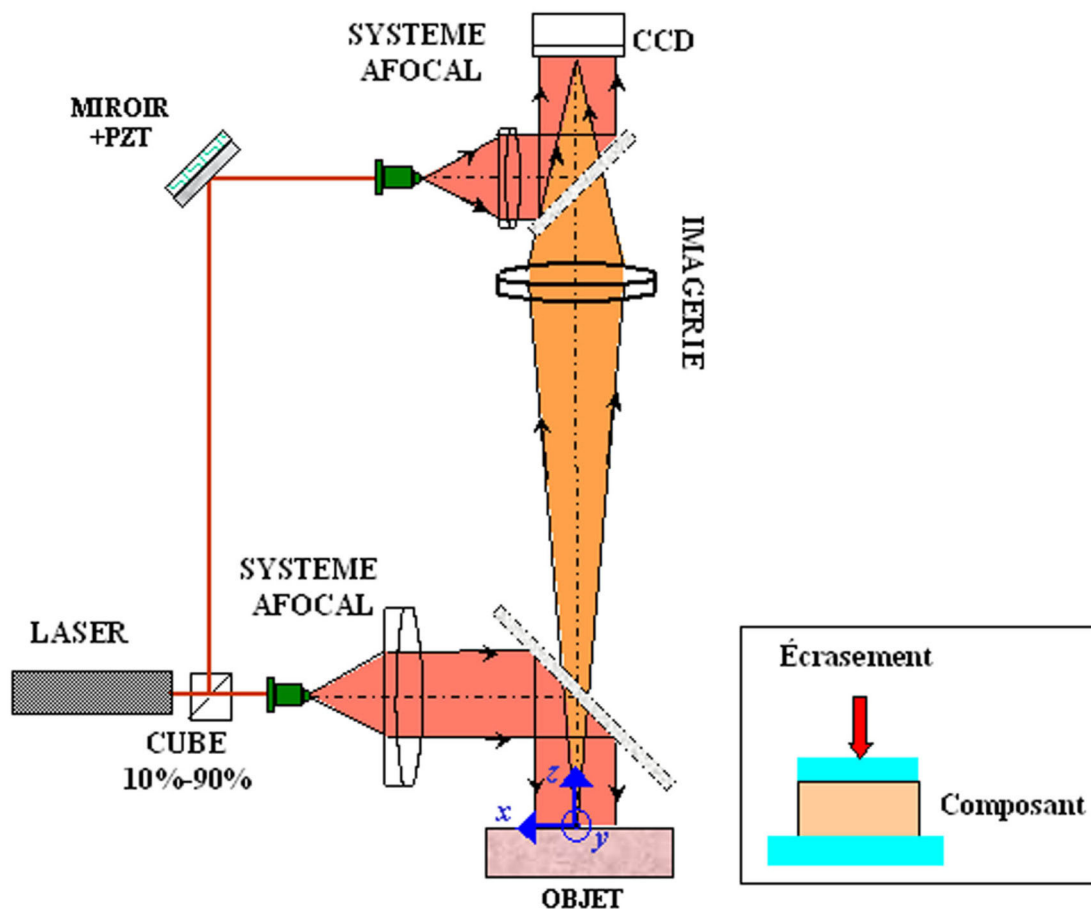


Figure 25 : Interféromètre speckle

L'interféromètre est composé d'une source laser, $\lambda = 0,6328 \mu\text{m}$, qui est séparée en deux faisceaux dans le rapport 10% – 90%. Le faisceau d'éclairage de l'objet est parallèle et illumine la surface perpendiculairement à sa normale. Le faisceau diffracte une onde vers le capteur d'image. L'objectif d'imagerie, ouvert à $N = 8$ donne l'image de la surface de l'objet sur la matrice de pixels de détecteur avec un grandissement transversal g_x . Le détecteur est de type CCD (Charge Coupled Device) et contient 572768 pixels de taille $p_x \times p_y = 8,6 \times 8,6 \mu\text{m}^2$. Le détecteur code l'image sur 8 bits et chaque pixel contient $N_e = 30000 \text{ électrons}$ à la saturation pour un bruit électronique donné à 10 électrons .

Le faisceau de référence interfère avec le faisceau objet au niveau du détecteur. Sur le trajet du faisceau référence, le miroir est monté sur un dispositif piézoélectrique de sensibilité $s_{pzt} = 0,25 \mu\text{m}/\text{V}$. La sensibilité a été estimée avec une incertitude $\sigma_{pzt}/s_{pzt} = 5\%$. On observe l'image de l'objet à travers l'objectif sur laquelle est superposé le speckle du à l'éclairage cohérent et la rugosité naturelle de l'objet. La figure 26 montre l'image de l'objet obtenue.

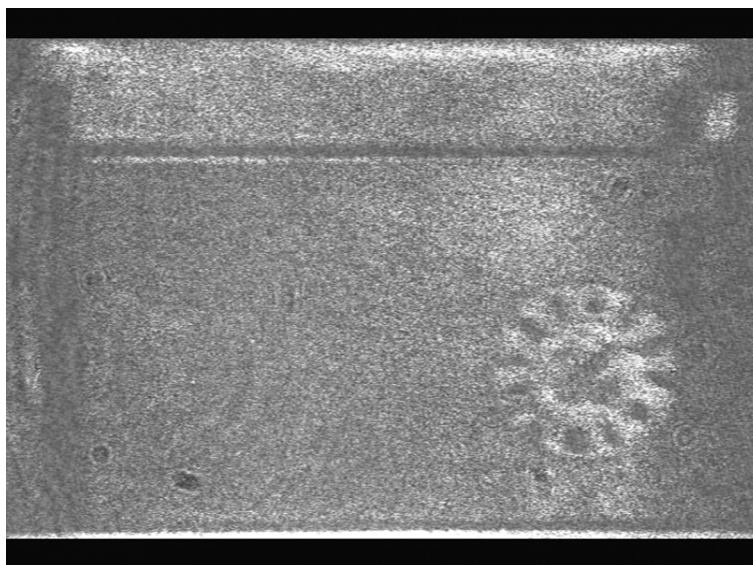


Figure 26: Image de l'objet

L'image est de mauvaise qualité compte tenu des grains de speckle qui constituent un bruit cohérent noyant le signal dans la fluctuation aléatoire. Cependant, la texture aléatoire code un signal d'interférences aléatoire puisque le speckle interfère avec l'onde de référence. Le signal enregistré sur le capteur est de la forme :

$$E(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\psi(x, y))$$

La phase optique ψ est aléatoire et uniformément distribuée sur $[-\pi, +\pi]$. Dans le plan du capteur, le speckle possède une longueur statistique moyenne donnée par :

$$\phi_{xy} = 1,22\lambda N(1 - g_y) \text{ dans le plan } (x, y)$$

$$\Delta z = 8\lambda N^2(1 - g_y)^2 \text{ dans l'axe } z$$

Ces deux dimensions constituent les longueurs de corrélation transversale et axiale du speckle du plan image.

Compte tenu des valeurs numériques, $g_y = -0,28$, nous avons $\phi_{xy} = 7,9 \mu m$ et $\Delta z = 530 \mu m$. La taille du grain de speckle dans le plan image est donc de l'ordre de $8 \mu m$, en conséquence nous avons un grain de speckle par pixel. Cette valeur indique que le déplacement maximum mesurable par le procédé est inférieur $8 \mu m$.

Compte tenu que la fluctuation aléatoire a une longueur de corrélation égale au pixel, nous pouvons affirmer que tout filtrage spatial avec un noyau de plusieurs pixels contribuera à la réduire fortement.

2. Principe de mesure

Pour évaluer l'étanchéité du composant on effectue une mesure de déformée lorsque le composant est sollicité en compression (voir figure 25).

Si on note $\delta(x, y)$ la déformée de la surface du composant entre deux instants donnés correspondants à deux chargements différents, la variation de phase optique produite par le déplacement de la surface est liée à $\delta(x, y)$ par la relation suivante :

$$\Delta \varphi(x, y) = \frac{4\pi}{\lambda} \delta(x, y)$$

Ainsi, le signal interférométrique est modifié par la variation de phase. Après déchargement, nous avons :

$$F(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\psi(x, y) + \Delta\varphi(x, y))$$

Le lecteur notera que puisque le signal speckle et sa phase aléatoire sont toujours présents dans le signal, l'image F est également une image très bruitée et l'observation de $\Delta\varphi$ est impossible.

Compte tenu de l'expression de E et F , la figure d'interférences finale se déduit donc simplement de la figure initiale. En effet, lorsque $\Delta\varphi = 2k\pi$ les deux figures sont identiques et $E = F$. A l'intérieur d'un cycle complet de variation de $\Delta\varphi$ entre $2k\pi$ et $2(k+1)\pi$ les deux figures se décorrèlent progressivement atteignant un maximum de dissemblance pour $\Delta\varphi = 2(k+0,5)\pi$.

De ce fait on perçoit qu'il va être possible de reconnaître les régions identiques, c'est à dire de visualiser les lignes ou les lieux des points d'égale différence des décalages subits par chaque grain de speckle en raison de la déformation de l'objet.

La condition pour que ceci soit valable est que le speckle se conserve au cours du chargement de l'objet. Les figures de speckle entre deux chargements doivent donc rester corrélées, c'est à dire que le déplacement produit à la surface de l'objet doit être plus petit que la longueur de corrélation du grain de speckle $(\phi_{xy}, \Delta z)$.

3. Franges de corrélation

Les techniques de visualisation des déplacements de l'objet sous la contrainte font appel à une simple superposition géométrique (comme en technique de Moiré). Le support d'enregistrement des speckle étant une caméra CCD, il est possible de comparer la référence E numérisée à la déformation F également numérisée. On soustrait en temps réel l'image de référence à l'image courante et on affiche le module du résultat, soit

$$\Delta E = |F - E| = 4b \left| \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \right| \left| \sin\left(\psi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \right|$$

La figure 27 illustre le résultat obtenu par cette technique.

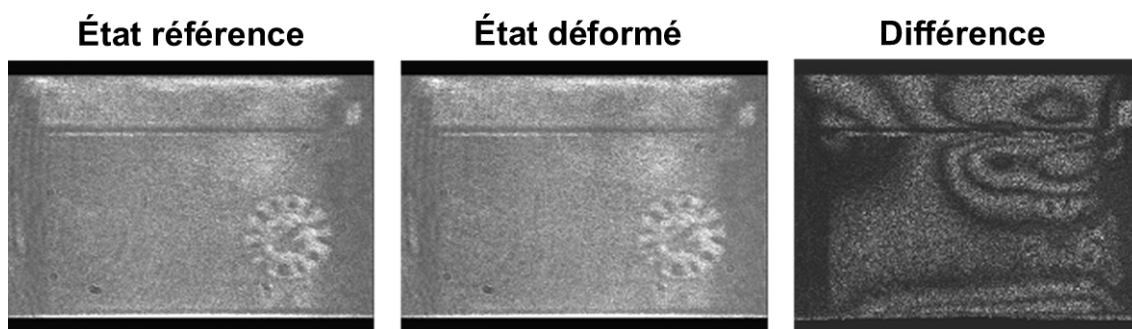


Figure 27 : Image de l'objet

On observe les franges de corrélation, lignes d'isodéplacement de la structure entre les deux chargements.

4. Démodulation de phase

La visualisation des franges de corrélation est très utile à l'ingénieur pour comprendre comment se déforme le composant et suspecter ses défauts d'étanchéité. Cependant, il s'agit là uniquement d'une méthode d'observation et non de quantification. Le signal observé étant de nature interférométrique, il est possible de démoduler la phase aléatoire et d'extraire la variation de phase entre les deux chargements. Le dispositif expérimental inclut un transducteur piézo électrique, il va donc être possible d'appliquer la technique de décalage de phase temporel par marche.

Considérons l'acquisition de 4 images à l'état de référence :

$$E_1 = a + b \cos(\psi)$$

$$E_2 = a + b \cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_3 = a + b \cos(\psi + \pi)$$

$$E_4 = a + b \cos\left(\psi + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Compte tenu de la géométrie et de la sensibilité du piézoélectrique, une marche de phase de $\pi/2$ est obtenue pour un déplacement du miroir de $\lambda/4\sqrt{2}$, soit 111,86 mn, ce qui correspond à une tension de 27,96 mV.

Les 4 interférogrammes déphasés permettent d'obtenir la phase par application de l'algorithme approprié :

$$\varphi_1 = \psi = \arctan\left(\frac{E_4 - E_2}{E_1 - E_3}\right)$$

Répetons la même opération après chargement de l'objet :

$$F_1 = a + b \cos(\psi + \Delta\varphi)$$

$$F_2 = a + b \cos\left(\psi + \Delta\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$F_3 = a + b \cos(\psi + \Delta\varphi + \pi)$$

$$F_4 = a + b \cos\left(\psi + \Delta\varphi + \frac{3\pi}{2}\right)$$

On obtient maintenant :

$$\varphi_2 = \psi + \Delta \varphi = \arctan\left(\frac{F_4 - F_2}{F_1 - F_3}\right)$$

La variation de phase due à la déformation de l'objet est estimée en calculant :

$$\widehat{\Delta \varphi} = \varphi_2 - \varphi_1$$

Le lecteur remarquera qu'il est possible d'obtenir directement une estimation de $\widehat{\Delta \varphi}$ par application de la relation suivante :

$$\widehat{\Delta \varphi} = \arctan\left(\frac{(F_4 - F_2)(E_1 - E_3) - (F_1 - F_3)(E_4 - E_2)}{(F_1 - F_3)(E_1 - E_3) + (F_4 - F_2)(E_4 - E_2)}\right)$$

A titre d'illustration, la figure 28 montre les deux phases extraites par application de l'algorithme aux deux jeux d'interférogrammes déphasés.

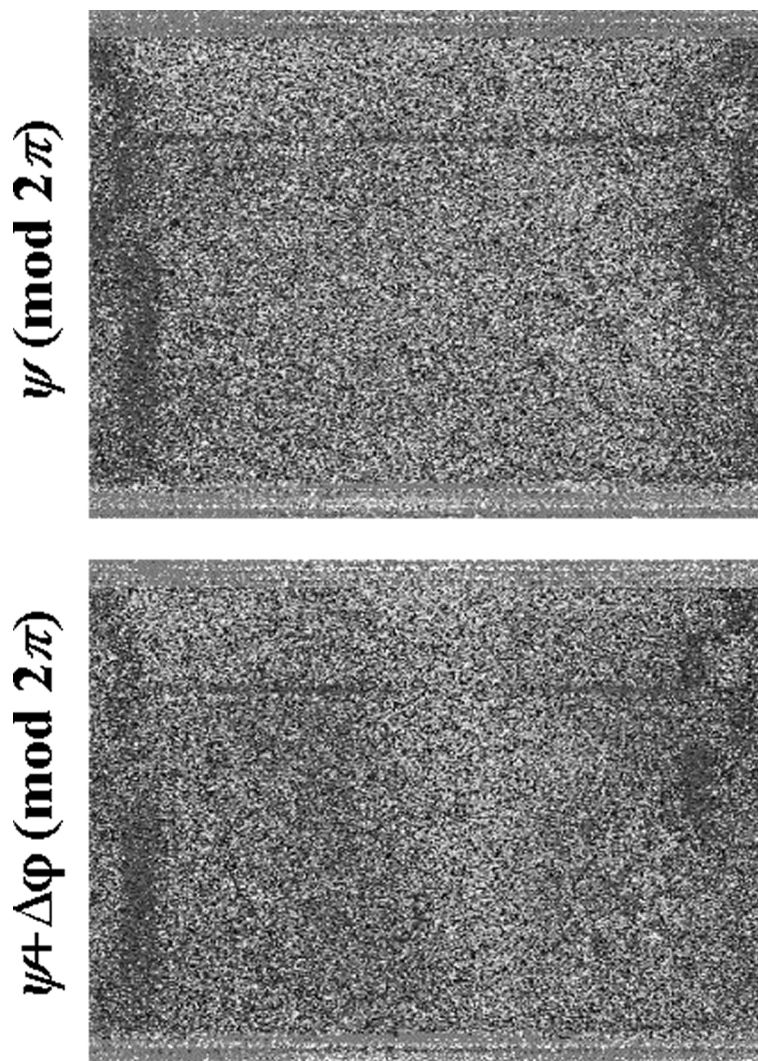


Figure 28 : Mesure de phase

On remarque le caractère aléatoire des deux mesures de phase. La figure 29 montre la variation de phase estimée modulo 2π à partir du jeu de 2×4 interférogrammes déphasés.

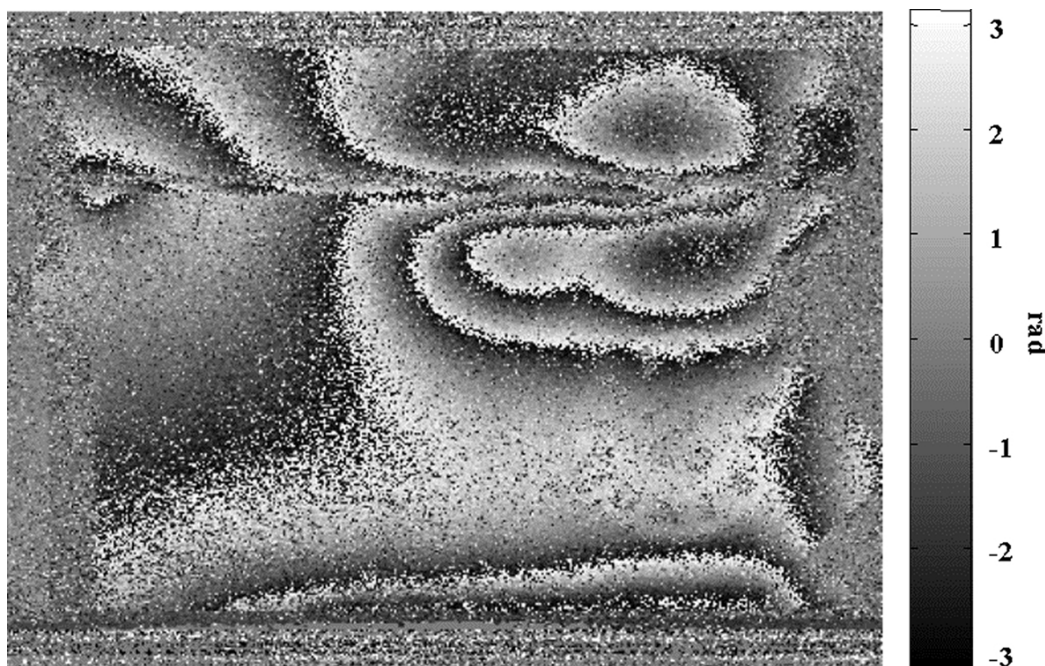


Figure 29 : Variation de phase due au chargement

On constate que la cartographie obtenue est bruitée. En effet, le chargement implique un déplacement du speckle qui commence à décorréler, introduisant ainsi des fluctuations aléatoires sur le second jeu d'interférogrammes. Ces fluctuations se retrouvent sur la mesure de la variation de phase.

Le traitement de la cartographie nécessite donc un **filtrage numérique**. Pratiquement, ce filtrage n'est pas opéré sur $\Delta\varphi$ car il détruirait les sauts de phase de 2π observables sur la figure 29. Le filtrage est appliqué sur $\sin(\Delta\varphi)$ et $\cos(\Delta\varphi)$ qui sont des fonctions lisses contrairement à arc tangente qui présente des discontinuités. Le filtrage utilise des filtres moyenne glissante ou médian avec des pavés 3×3 , 5×5 , ou 7×7 . La taille du noyau doit être adaptée à la résolution spatiale souhaitée dans le plan image. On peut considérer qu'un filtrage linéaire avec un noyau $K \times K$ dégrade la résolution de $K p_x$. La figure 30 montre la carte de phase filtrée par une moyenne glissante $K = 7$ appliquée sur le cosinus et le sinus de la variation de phase.

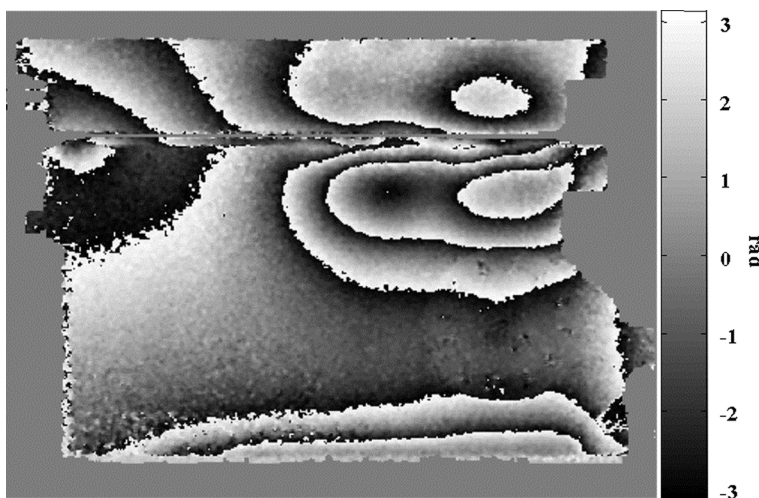


Figure 30 : Variation de phase lissée

On observe la quasi disparition des fluctuations aléatoires. Le filtrage est toujours nécessaire en interférométrie de speckle.

La carte de phase peut maintenant être déroulée pour reconstruire sa continuité à 2π . Le résultat de la procédure est illustré sur la figure 31.

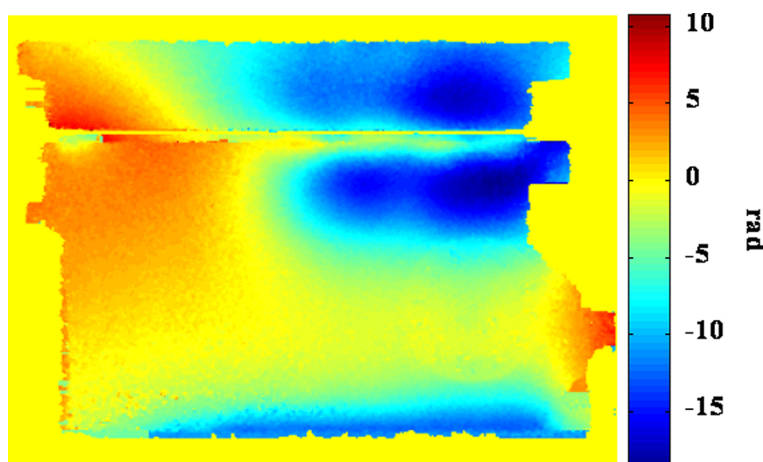


Figure 31: Variation de phase déroulée

Dans le cas de l'étude de l'étanchéité, il faut produire un chargement jusqu'à $33 \mu\text{m}$ d'écrasement. En appliquant la procédure présentée ci dessus, puis en sommant les résultats intermédiaires, on peut construire la cartographie de la déformée de l'objet entre le chargement « 0 » et le chargement « $33 \mu\text{m}$ ». La figure 32 montre le résultat obtenu.

Écrasement de $33 \mu\text{m}$

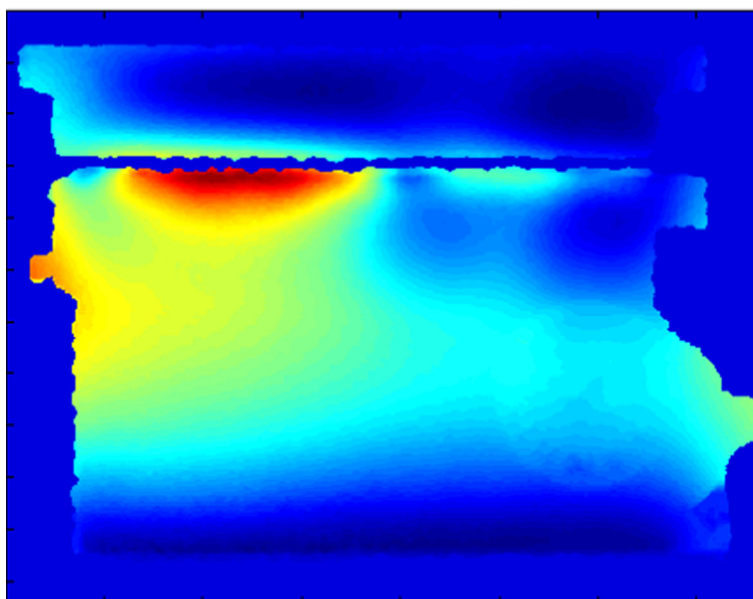


Figure 32: Mesure de la déformée de l'objet sous $33 \mu\text{m}$ de chargement

Lors de la description de la procédure interférométrique, nous avons choisi d'utiliser un algorithme à 2×4 , interférogrammes déphasés de $\pi/2$. Ce choix constitue un bon compromis entre robustesse aux fluctuations aléatoires et rapidité d'acquisition et de traitement numérique. On peut intuitivement penser que plus nous utiliserons un grand nombre d'interférogrammes, davantage de robustesse au bruit nous aurons.

Considérons que parmi le jeu d'interférogrammes, on utilise 2×2 interférogrammes déphasés de $\pi/2$. L'algorithme, qui n'a pas été présenté dans la partie de cours, a été développé spécialement pour l'interférométrie de speckle. La variation de phase est estimée par :

$$\widehat{\Delta\varphi} = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan\left(\frac{E_1 - F_2}{E_2 - F_1}\right)$$

Considérons également que parmi le jeu d'interférogrammes, on utilise 2×3 , interférogrammes déphasés de $\pi/2$. Le lecteur pourra montrer que l'algorithme est le suivant :

$$\widehat{\Delta\varphi} = \arctan\left(\frac{(2F_2 - F_1 - F_3)(E_3 - E_1) - (2E_2 - E_1 - E_3)(F_3 - F_1)}{(F_3 - F_1)(E_3 - E_1) + (2F_2 - F_1 - F_3)(2E_2 - E_1 - E_3)}\right)$$

La figure 33 montre les résultats obtenus avec ces deux algorithmes.

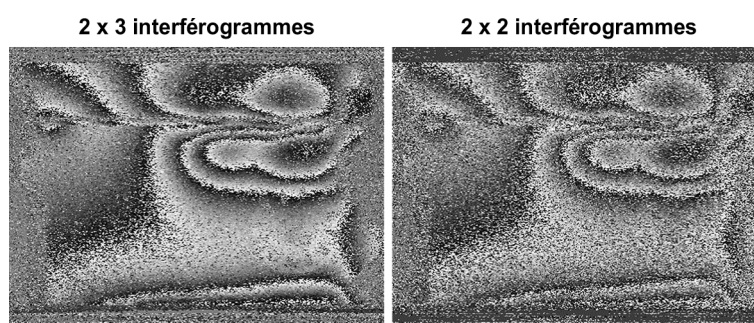


Figure 33 : Variation de phase estimée avec 2×3 et 2×2 interférogrammes

On constate nettement l'influence du nombre d'interférogrammes puisque le résultat obtenu avec l'algorithme 2×2 est plus bruité que celui obtenu avec 2×3 lui-même plus bruité que celui obtenu avec 2×4 .

Nous constatons que dans le cas de l'interférométrie de speckle, le bruit généré par la décorrélation des speckle lors du chargement de l'objet apparaît prépondérant.

Dans un interféromètre, classique ou speckle, les sources d'erreurs ou de fluctuation sur la mesure sont nombreuses. Elles sont recensées dans le tableau 1 ci-dessous :

Composant	Origine de l'erreur	Classification
Laser	variation de puissance moyenne	type B
	variation de cohérence	type B
	variation de fréquence laser	type B
	bruit de photons	type A
Décalage de phase	mauvais étalonnage	type B
	non linéarité du déphasage	type B
	inégalité du déphasage	type A
Interféromètre	décorrélation de speckle	type A
	aberrations géométriques	type B
	vibration haute fréquence	type A
	vibration basse fréquence	type A
Détection	bruit électronique	type A
	bruit de quantification	type A
	non linéarité	type B

Tableau 1 - Origine des sources d'erreur

Rappel

Incertitudes de type A : les incertitudes associées à toutes les causes sont évaluées par l'analyse statistique de séries d'observations et l'incertitude due à chaque cause est caractérisée par un écart-type évalué statistiquement.

Incertitudes de type B : la variance estimée ou l'incertitude-type est évaluée par un jugement scientifique fondé sur toutes les informations disponibles à propos de la variabilité possible du paramètre considéré.

La sensibilité aux sources d'erreurs systématiques et aux fluctuations aléatoires de l'algorithme à décalage de phase sera appréhendée dans la partie exercice.

IV. Exercice

La partie étude de cas a mis en évidence certains aspects métrologiques liés à la mesure de franges. En effet, nous avons été sensibilisé aux fluctuations aléatoires. Cependant, même si le bruit de décorrélation est prépondérant en interférométrie de speckle, pour d'autres applications, d'autres sources de bruit peuvent limiter la résolution de la démodulation ; on peut citer par exemple le bruit de photons. Parmi les sources d'erreurs systématiques indiquées dans le tableau de la partie étude de cas, on notera l'influence du déphasage entre les interférogrammes.

1. Calcul des erreurs systématiques

Les sources de limitations peuvent toutes être caractérisées par un paramètre p , qui génère une erreur sur l'estimation de la phase $\Delta\varphi$. Si on suit les recommandations du GUM [16 [Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement]], l'erreur systématique sur la phase peut être évaluée par cette équation :

$$\epsilon(\Delta\varphi, \phi, a, b, p) = \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial p} dp + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta\varphi}{\partial p^2} (dp)^2 + \dots + \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \Delta\varphi}{\partial p^k} (dp)^k + \dots$$

Considérons la forme générale des algorithmes de décalage de phase, nous pouvons écrire : [17 [Error Analysis for a Mach Zehnder Type Speckle Interferometer], 18 [Systematic Errors of Phase Shifting Speckle Interferometry]]

$$\Delta\varphi = \arctan\left(\frac{S(E_i)}{C(E_i)}\right)$$

Il peut être montré que $S(E_i) = \kappa\beta\sin(\Delta\varphi)$, où κ est un coefficient qui dépend des interférogrammes utilisés pour le calcul et β est lié au paramètre b de la figure de franges.

Le paramètre p introduira des variations de $S(E_i)$ et $C(E_i)$, notées $dS(E_i)$ et $dC(E_i)$. Dans ce cas, le numérateur sera égal à $\kappa\beta\sin(\Delta\varphi) + dS(E_i)$ et le dénominateur à $\kappa\beta\cos(\Delta\varphi) + dC(E_i)$. La variation du dénominateur et du numérateur induite par le paramètre p donnera donc

$$\begin{aligned} \epsilon(\Delta\varphi, \phi, a, b, p) &= \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial S} dS(E_i) + \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial C} dC(E_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta\varphi}{\partial S^2} (dS(E_i))^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta\varphi}{\partial C^2} (dC(E_i))^2 \\ &+ \dots + \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \Delta\varphi}{\partial S^k} (dS(E_i))^k + \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \Delta\varphi}{\partial C^k} (dC(E_i))^k + \dots \end{aligned}$$

Une approximation linéaire de cette équation conduit à une expression approchée de l'erreur systématique :

$$\epsilon(\Delta\varphi, \phi, a, b, p) = \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial S} dS(E_i) + \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial C} dC(E_i)$$

La statistique caractéristique de cette erreur est sa variance σ_ϵ qui sera estimée par la relation suivante [17 [Error Analysis for a Mach Zehnder Type Speckle Interferometer]] :

$$\sigma_\epsilon^2 = \langle \epsilon^2(\Delta\varphi, \phi, a, b, p) \rangle - \langle \epsilon(\Delta\varphi, \phi, a, b, p) \rangle^2$$

avec le moment d'ordre n étant égal à :

$$\langle \epsilon^n(\Delta\varphi, \phi, a, b, p) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon^n(u, \phi, a, b, p) P_{\Delta\varphi}(u) du$$

où $\langle \dots \rangle$ signifie moyenne statistique et $P_{\Delta\varphi}(\Delta\varphi)$ est la densité de probabilité de $\Delta\varphi$. On peut considérer que dans le champ de franges, $\Delta\varphi$ est uniformément distribuée sur $[-\pi, +\pi]$, de sorte que nous aurons :

$$\langle \epsilon^n(\Delta\varphi, \phi, a, b, p) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \epsilon^n(u, \phi, a, b, p) du$$

La valeur crête à crête de $\epsilon(\Delta\varphi, \phi, a, b, p)$ est donnée par

$$PV_\epsilon = \max(\epsilon(\Delta\varphi, \phi, a, b, p)) - \min(\epsilon(\Delta\varphi, \phi, a, b, p))$$

2. Calcul des erreurs aléatoires

En se référant toujours au GUM, la variance générée par une source d'erreur à caractère aléatoire, dont les variations induites sur les interférogrammes demeurent aléatoires, décorréliées et de variance $\alpha^2 E_i$, est donnée par l'équation suivante :

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial E_i} \right)^2 \sigma_{E_i}^2$$

On se contente donc de sommer les variances sur chaque interférogramme. On a supposé que les fluctuations étaient aléatoires entre chaque image et surtout décorréliées. En effet, cette relation simple ne tient ainsi pas compte des corrélations entre les variations. Dans la pratique, ce cas est très souvent vérifié.

$$\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial E_i}$$

Les quantités $\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial E_i}$ s'appellent les sensibilités de l'algorithme.

3. Exercice auto-correctif

Lors de l'étude de cas, nous avons employé un calcul de phase par l'algorithme à 4 images. Les données techniques sont celles de l'étude de cas.

On pourra considérer les cas $b/a = 100\%$ et $b/a = 40\%$.

Rappels de mathématiques

On rappelle au lecteur que :

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Question 1

[Solution n°1 p 56]

Question 1 : Déterminer les sensibilités de l'algorithme à 4 interférogrammes déphasés de $\pi/2$

Question 2

[Solution n°2 p 56]

Question 2 : Déterminer l'erreur systématique produite par un mauvais étalonnage du dispositif piézoélectrique ; exprimer sa contribution à l'erreur sur la phase en évaluant son écart type et valeur crête à crête.

Question 3

[Solution n°3 p 57]

Question 3 : Dans le cas de l'interférométrie de speckle, quelle est l'erreur sur la phase ? Quelle conséquence peut on en déduire ?

Question 4

[Solution n°4 p 57]

Question 4 : D'après les données constructeurs, évaluer les écarts types de bruit exprimés en électrons pour le bruit de photon (σ_p) et le bruit de quantification (σ_q)

Question 5

[Solution n°5 p 58]

Question 5 : Exprimer les contributions à l'erreur aléatoire de mesure sur la phase optique pour le bruit de photon, le bruit de quantification et le bruit électronique

Solution des exercices

>Solution n°1 (exercice p. 55)

Puisque $\Delta\varphi = \arctan\left(\frac{E_4 - E_2}{E_1 - E_3}\right)$, on a :

$$\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial E_1} = -\frac{E_4 - E_2}{(E_1 - E_3)^2} \frac{1}{1 + \tan^2(\Delta\varphi)} = -\frac{1}{2b} \sin(\Delta\varphi)$$

$$\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial E_2} = \frac{-1}{(E_1 - E_3)} \frac{1}{1 + \tan^2(\Delta\varphi)} = -\frac{1}{2b} \cos(\Delta\varphi)$$

$$\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial E_3} = \frac{E_4 - E_2}{(E_1 - E_3)^2} \frac{1}{1 + \tan^2(\Delta\varphi)} = +\frac{1}{2b} \sin(\Delta\varphi)$$

$$\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial E_4} = \frac{1}{(E_1 - E_3)} \frac{1}{1 + \tan^2(\Delta\varphi)} = +\frac{1}{2b} \cos(\Delta\varphi)$$

>Solution n°2 (exercice p. 55)

Le déphasage doit être produit avec la valeur

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} s_{pzt} V$$

Compte tenu que la valeur $s_{pzt} = 0,25 \mu\text{m}/V$ est connue avec une incertitude $\sigma_{pzt} = 15\%$,

l'écart entre le déphasage réel et le déphasage nominal est $d\phi_i = (i-1)\phi \frac{\sigma_{pzt}}{s_{pzt}}$

Les interférogrammes E_i sont donc :

$$E_i = a + b \cos(\Delta\varphi + (i-1)\phi) - b(i-1)\phi \frac{\sigma_{pzt}}{s_{pzt}} \sin(\Delta\varphi + (i-1)\phi)$$

et la variation sur les interférogrammes E_i est

$$dE_i = -b(i-1)\phi \frac{\sigma_{pzt}}{s_{pzt}} \sin(\Delta\varphi + (i-1)\phi)$$

On en déduit

$$dS(E_i) = dE_4 - dE_2 = +\pi b \frac{\sigma_{pzt}}{s_{pzt}} \cos(\Delta\varphi)$$

$$dS(E_i) = dE_1 - dE_3 = -\pi b \frac{\sigma_{pzl}}{s_{pzl}} \sin(\Delta\varphi)$$

et l'erreur sur la mesure de phase

$$\epsilon(\Delta\varphi, \phi, a, b, s_{pzl}) = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{pzl}}{s_{pzl}} \cos(2\Delta\varphi)$$

On constate que l'erreur a une périodicité double de celle de la variation de franges, c'est à dire que les « franges de l'erreur » ont un pas deux fois plus petit que les franges de l'interférogramme.

Compte tenu des rappels du paragraphe ci-dessus, on en déduit l'écart-type de l'erreur :

$$\sigma_\epsilon = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\sigma_{pzl}}{s_{pzl}} = 0,055 \text{ rad} \approx \frac{2\pi}{113}$$

et la valeur crête à crête :

$$PV_\epsilon = \max(\epsilon(\Delta\varphi, \phi, a, b, s_{pzl})) - \min(\epsilon(\Delta\varphi, \phi, a, b, s_{pzl}))$$

soit

$$PV_\epsilon = \pi \frac{\sigma_{pzl}}{s_{pzl}} = 0,157 \text{ rad} \approx \frac{2\pi}{40}$$

On constate que l'erreur systématique est de l'ordre de $1/40^{\text{ème}}$ de franges. La précision n'est donc pas suffisante si on souhaite avoir une exactitude meilleure que $1/100^{\text{ème}}$ de franges. En revanche, le dispositif piézoélectrique est de qualité suffisante pour tout application ou les limitations imposées par les autres sources d'erreur sont supérieures, comme par exemple dans le cas de l'interférométrie de speckle.

> Solution n°3 (exercice p. 55)

Compte tenu que la mesure de phase est effectuée par soustraction de deux mesures de phases, nous avons

$$\epsilon(\Delta\varphi, \phi, a, b, s_{pzl}) = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{pzl}}{s_{pzl}} (\cos(2\Delta\varphi + 2\psi) - \cos(2\psi))$$

L'erreur a donc un caractère aléatoire compte tenu de la présence de la phase aléatoire ψ dans l'expression. En conséquence, l'application d'un filtrage numérique sur la carte de phase conduira à une atténuation forte de cette erreur systématique. En effet, nous avons vu que la longueur de corrélation du speckle est de l'ordre d'un pixel. Sa contribution dans la mesure est donc certainement négligeable.

> Solution n°4 (exercice p. 55)

Le capteur CCD contient 30000 électrons à la saturation pour chaque pixel, le bruit de photon à la saturation est donc égal à $\sigma_p = \sqrt{30000} = 173,2$ électrons

Le capteur numérise les interférogramme sur 8 bits, l'échelon de quantification vaut donc $q \approx \frac{30000}{2^8} = 117,64 \text{ électrons}$ et l'écart type du bruit est égal à $\sigma_q = \frac{q}{\sqrt{12}} \approx 34 \text{ électrons}$.

> Solution n°5 (exercice p. 55)

Pour chaque source de bruit, la contribution à l'erreur aléatoire de mesure sur la phase optique est déterminée par la relation

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial E_i} \right)^2 \sigma_{E_i}^2$$

où $\sigma_{E_i} = \{\sigma_p, \sigma_e, \sigma_q\}$,

On suppose les bruits identiques sur chaque interférogramme :

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = \sigma_E^2 \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial E_i} \right)^2$$

avec $\sigma_E = \{\sigma_p, \sigma_e, \sigma_q\}$

d'après les expressions précédentes, on a

$$\sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial E_i} \right)^2 = \frac{1}{2b^2}$$

et

$$\sigma_{\Delta\varphi} = \frac{\sigma_E}{\sqrt{2}b}$$

Pour chaque interférogramme, la valeur maximale de E_i est égale à $a + b$ et la valeur minimale à $a - b$. Idéalement, il faudrait $a = b$ et on aurait $2a = 30000 \text{ électrons}$. Considérons donc que $a = 15000 \text{ électrons}$.

Pour le bruit de photons :

$$\sigma_{\Delta\varphi} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{2}b} = \frac{1}{a} \times \frac{a}{b} \times 173 \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b} \times 8,16 \text{ mrad}$$

$$\text{pour } b/a=1 \quad \sigma_{\Delta\varphi} = 8,16 \text{ mrad} \approx \frac{2\pi}{770}$$

$$\text{pour } b/a=0,4 \quad \sigma_{\Delta\varphi} = 20,4 \text{ mrad} \approx \frac{2\pi}{308}$$

Pour le bruit électronique

$$\sigma_{\Delta\varphi} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{2}b} = \frac{1}{a} \times \frac{a}{b} \times \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b} \times 0,47 \text{ mrad}$$

$$\text{pour } b/a=1 \quad \sigma_{\Delta\varphi}=0,47 \text{ mrad} \approx \frac{2\pi}{1336}$$

$$\text{pour } b/a=0,4 \quad \sigma_{\Delta\varphi}=1,1 \text{ mrad} \approx \frac{2\pi}{571}$$

Pour le bruit de quantification

$$\sigma_{\Delta\varphi} = \frac{\sigma_q}{\sqrt{2}b} = \frac{1}{a} \times \frac{a}{b} \times \frac{34}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b} \times 1,6 \text{ mrad}$$

$$\text{pour } b/a=1 \quad \sigma_{\Delta\varphi}=1,6 \text{ mrad} \approx \frac{2\pi}{3920}$$

$$\text{pour } b/a=0,4 \quad \sigma_{\Delta\varphi}=1 \text{ mrad} \approx \frac{2\pi}{1568}$$

Le bruit de photon prédomine, mais sa contribution est très inférieure à celle de l'erreur d'étalonnage du dispositif déphaseur.

Bibliographie

[**Digital Wavefront Measuring Interferometer for Testing Optical Surfaces and Lenses**] BRUNING J.H., HERRIOTT D.R., GALLAGHER J.E., ROSENFELD D.P., WHITE A.D., BRANGACCIO D.J., *Digital Wavefront Measuring Interferometer for Testing Optical Surfaces and Lenses* (p.pp. 2693-2703), *Applied Optics*, 1974--, Vol. 13, n° 11, .

[**Digital Wave-Front Measuring Interferometry : Some Systematic Error Sources**] SCHWIDER J., BUROW R., ELSSNER K.E., GRZANNA J., SPOLACZYK R., MERKEL K., *Digital Wave-Front Measuring Interferometry : Some Systematic Error Sources* (p.pp. 3421-3432), *Applied Optics*, 1983--, Vol. 22, n° 21, .

[**Error Analysis for a Mach Zehnder Type Speckle Interferometer**] PICART P., *Error Analysis for a Mach Zehnder Type Speckle Interferometer* (p.pp. 335-353), *Optics and Lasers in Engineering*, 2001--, Vol. 35, n° 6, .

[**Fourier-transform Method of Fringe-pattern Analysis for Computer-based Topography and Interferometry,,**] TAKEDA M., INA H., KOBAYASHI S., *Fourier-transform Method of Fringe-pattern Analysis for Computer-based Topography and Interferometry,,* (p.pp. 156-360), *Journal of the Optical Society of America*, 1982--, Vol. 72, n° 1, .

[**Generalized Data Reduction for Heterodyne Interferometry**] GREIVENKAMP J.E., *Generalized Data Reduction for Heterodyne Interferometry* (p.pp. 350-352), *Optical Engineering*, 1984--, Vol. 23, n° 4, .

[**Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement**] --, *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ICS 03.120.30;17.020, GUM, -, June 1996.

[**Holographic and speckle interferometry**] JONES R., WYKES C., *Holographic and speckle interferometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[**Installation et Utilisation du Comparateur Photoélectrique et Interférentiel du Bureau International des Poids et Mesures,**] CARRE P., *Installation et Utilisation du Comparateur Photoélectrique et Interférentiel du Bureau International des Poids et Mesures*, (p.pp. 13-23), *Metrologia*, 1966--, Vol. 2, n° 1, .

[**Interferometric Phase Measurement Using spatial Synchronous Detection**] WOMACK K.H., *Interferometric Phase Measurement Using spatial Synchronous Detection* (p.pp. 391-395), *Optical Engineering*, 1984--, Vol. 23, n° 4, .

[**Optical Phase Measurement in Real Time**] FRANTZ L.M., SAWCHUK A.A., OHE W., *Optical Phase Measurement in Real Time* (p.pp. 3301-3306), *Applied Optics*, 1979--, Vol. 18, .

[**Phase Evaluation Methods in Whole-Field Optical Measurement Techniques**] DORRIO B.V., FERNANDEZ J.L., *Phase Evaluation Methods in Whole-Field Optical Measurement Techniques* (p.pp 33-55), *Measurement Science and Technology*, 1999--, Vol. 10, .

[**Phase Measurement Interferometry Techniques**] CREATH K., *Phase Measurement Interferometry Techniques* (p.pp 349-393), *Progress in Optics - E. Wolf Ed.*, North-Holland publishing Company, 1988--, Vol. XXVI, .

[**Phase Shifting Speckle Interferometry**] CREATH K., *Phase Shifting Speckle Interferometry* (p.3053-3058), *Applied Optics*, 1985--, Vol. 24, n° 18, .

[**Sinusoidal Phase Modulating Interferometer Using the Integrating-Bucket Method ,**] SASAKI O., OKAZAKI H., SAKAI M., *Sinusoidal Phase Modulating Interferometer Using the Integrating-Bucket Method ,* (p.pp. 1089-1093), *Applied Optics*, 1987--, Vol. 26, n° 6, .

[Systematic Errors of Phase Shifting Speckle Interferometry] PICART P., PASCAL J.-C., BRETEAU J.-M., *Systematic Errors of Phase Shifting Speckle Interferometry* (p.2107-2116), Applied Optics, 2001--, Vol. 40, n° 13, .

[The Architecture of a Multipurpose Fringe Pattern Analysis System] KUJAWINSKA M., *The Architecture of a Multipurpose Fringe Pattern Analysis System* (p.pp. 261-263), Optics and Lasers in engineering, 1993--, Vol. 19, .

[Two-Dimensional Phase Unwrapping : Theory, Algorithms and Software] GHIGLIA D.C., PRITT M.D., *Two-Dimensional Phase Unwrapping : Theory, Algorithms and Software*, Wiley Ed, New York, 1998.

[Use of an ac Heterodyne Lateral Shear Interferometer With Real-Time Wavefront Correction Systems] WYANT J.C., *Use of an ac Heterodyne Lateral Shear Interferometer With Real-Time Wavefront Correction Systems* (p.pp. 2622-2626), Applied Optics, 1975--, Vol. 14, n° 11, .