

# Mesures de vitesses et déplacements par interférométrie hétérodyne

DENIS MOUNIER

# Table des matières

<b>I. Présentation</b>	<b>3</b>
<b>II. Cours</b>	<b>4</b>
1. Principes mis en œuvre dans les mesures de déplacements et de vitesses.....	<b>4</b>
1.1. Rappel : modulation de fréquence d'une onde lumineuse par l'effet Doppler.....	<b>5</b>
1.2. L'interférométrie à deux ondes.....	<b>6</b>
2. L'interférométrie hétérodyne.....	<b>7</b>
2.1. Interféromètre hétérodyne.....	<b>7</b>
3. Mesures de plusieurs composantes de déplacement ou de vitesse.....	<b>11</b>
3.1. Mesures vibratoires « dans-le-plan » et « hors-plan ».....	<b>11</b>
3.2. Vélocimétrie de surface.....	<b>13</b>
3.3. Anémométrie Laser Doppler (ALD) et Vélocimétrie Laser Doppler (VLD).....	<b>15</b>
3.4. Mesures 3D.....	<b>16</b>
4. Mesures rotationnelles.....	<b>18</b>
4.1. Vélocimètre rotationnel.....	<b>18</b>
4.2. Gyromètre laser à fibre ou « gyrofibre ».....	<b>20</b>
<b>III. Etudes de cas</b>	<b>22</b>
1. Vélocimètre hétérodyne.....	<b>22</b>
<b>IV. Exercices</b>	<b>25</b>
1. Questions.....	<b>25</b>
2. Exercice.....	<b>25</b>
<b>Solution des exercices</b>	<b>26</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>28</b>
<b>Webographie</b>	<b>29</b>

# I.Présentation

## *Module :*

---

Interférences et Diffraction

## *Auteur(s) :*

---

Denis MOUNIER - ENSIM – Le Mans Université

## *Résumé :*

---

Le cours traite des instruments de mesures de déplacements ou de vitesses par interférométrie hétérodyne. Il fait suite au cours présentant les mesures de déplacements ou de vitesses par interférométrie homodyne. Les instruments concernés sont : les vibromètres laser industriels, les lasers de poursuite, l'instrumentation d'Anémométrie Laser Doppler (ALD). Les dispositifs de mesure reposant sur le « self-mixing » ou les méthodes de temps de vol ou de déphasage ne sont pas abordés. On montre comment sont réalisées les mesures ponctuelles tridimensionnelles, les mesures de vitesses de rotation. Les aspects métrologiques des vibromètres laser hétérodynes sont présentés : bande passante, sensibilité, limite de détection d'un déplacement ou d'une vitesse.

## *Mots-clés :*

---

Effet Doppler, Interférométrie homodyne, interférométrie hétérodyne, Vibrométrie, vélocimétrie laser, Laser de poursuite, laser tracker, Ultrasons laser, Comptage de franges, Bruit de photons, Cellule de Bragg

## *Pré-requis :*

---

Optique ondulatoire et interférences. Optique géométrique. Photométrie. Laser : sources lasers, optique des faisceaux gaussiens, speckle. Polarisation de la lumière. Éléments de traitement du signal. Bruits électroniques.

## *Objectif(s) pédagogique(s) :*

---

Comprendre les possibilités et limites des instruments de mesures de déplacements ou de vitesses qui utilisent l'interférométrie hétérodyne.

## *Plan du cours :*

---

- Introduction
- Rappel : modulation de fréquence d'une onde lumineuse par l'effet Doppler
- L'interférométrie à deux ondes
- Conclusion

## *Conception & production :*

---

PRN - Le Mans Université

## *Licence :*

---

Licence GNU<sup>1</sup>

1 - <http://www.gnu.org/licenses/fdl.txt>

# II.Cours

## 1. Principes mis en œuvre dans les mesures de déplacements et de vitesses

L'interféromètre homodyne a potentiellement une très large bande passante qui n'est limitée en principe que par le temps de réponse des photodétecteurs. La sensibilité à une mesure de déplacement est indépendante de la fréquence. Des mesures de vibrations ultrasonores jusqu'à des fréquences quelques GHz sont possible avec l'interférométrie homodyne.

La mesure d'ultrasons avec un interféromètre homodyne nécessite un asservissement pour stabiliser le point de fonctionnement de l'interféromètre à son maximum de sensibilité afin d'éviter les dérives de la phase optique que peut créer son environnement (vibrations, fluctuations de températures). Cela restreint son utilisation à un environnement peu perturbé comme celui d'un laboratoire climatisé.

Dans la grande majorité des cas, il est nécessaire de réaliser des mesures réalisés dans des environnements souvent perturbés, en milieu industriel ou en extérieur. De plus, il n'est pas toujours utile de disposer d'une bande passante extrêmement large. Pour une application particulière, l'utilisateur pourra limiter sa bande passante. La plupart des interféromètres équipant des instruments industriels sont des **interféromètres hétérodynes**.

Dans ce cours seront présentés les systèmes de mesures industriels qui utilisent l'interférométrie hétérodyne : la vibrométrie tridimensionnelle, de la vélocimétrie « dans le plan », de l'Anémométrie Laser Doppler (ALD) et de la vélocimétrie rotationnelle. Les mesures vibratoires tridimensionnelles et les mesures rotationnelles sont possibles avec plusieurs faisceaux laser (figure 1).

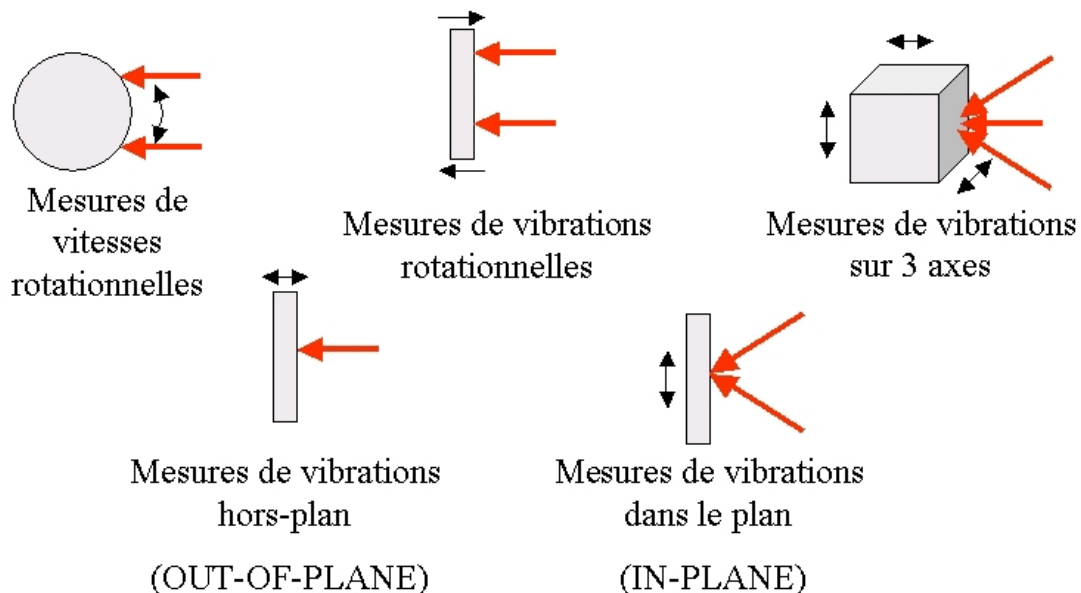


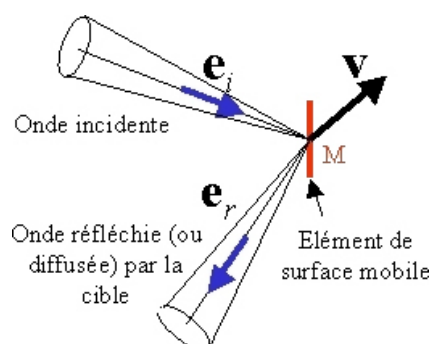
Figure 1 - Types de déplacements mesurables au moyen de faisceaux optiques

On traitera de la démodulation de fréquence (ou de phase) qui permet de déterminer le signal modulant : vitesse ( ou déplacement) de la cible.

## 1.1. Rappel : modulation de fréquence d'une onde lumineuse par l'effet Doppler

On considère une onde lumineuse monochromatique de fréquence  $\nu_0$  ou quasi-monochromatique de largeur spectrale  $\delta\nu$  petite devant sa fréquence centrale  $\nu_0$ . La plupart des sources laser à émission continue peuvent être considérée comme des sources quasi-monochromatiques s'exprimant de la forme  $s_i(\vec{r}, t) = A_i \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi_0)$ . On suppose que l'onde lumineuse est focalisée en un point cible M d'une surface diffusante. Ce point M a une vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel où la source laser est au repos. La **direction d'incidence** de l'onde sur la cible est donnée par le vecteur d'onde  $\vec{k}_i$ . On considère la lumière diffusée dans une direction particulière : la **direction d'observation**, caractérisée par le vecteur d'onde  $\vec{k}_r$ . Les vecteurs unitaires associés aux directions d'incidence et d'observation sont respectivement

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{k}_i}{\|\vec{k}_i\|} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{k}_r}{\|\vec{k}_r\|} \quad (\text{voir figure}).$$



Directions des faisceaux incident et réfléchi par une cible mobile intervenant dans la formule du décalage Doppler

### Fondamental

L'onde lumineuse diffusée ou réfléchi par la cible en mouvement subit un décalage en fréquence  $\delta\nu_D(t)$  instantané appelé **décalage Doppler** égal à :

$$\delta\nu_D(t) = \frac{\vec{v}(t) \cdot (\vec{e}_r - \vec{e}_i)}{\lambda}$$

La fréquence instantanée de l'onde réfléchi  $\nu(t) = \nu_0 + \delta\nu_D(t)$  est **modulée en fréquence** par le mouvement de la cible.

Le décalage Doppler est maximal si la direction de la vitesse de la cible est colinéaire au vecteur  $\vec{e}_r - \vec{e}_i$  appelé **vecteur sensibilité**.

Les techniques d'Anémométrie Laser Doppler (ALD) et de Vélocimétrie Laser Doppler (VLD) mettent à profit ce décalage Doppler pour mesurer les vitesses de particules en suspension, entraînée, par un gaz ou un liquide en mouvement (voir § « Anémométrie Laser Doppler (ALD) et Vélocimétrie Laser Doppler (VLD) »).

Dans le cours « **Mesures de déplacements et de vitesses par interférométrie homodyne** », on montre comment mesurer un tel décalage Doppler avec un interféromètre de Fabry-Pérot.

L'amplitude de l'onde lumineuse réfléchi par la cible peut s'écrire  $s_r(\vec{r}, t) = A_r \cos[2\pi\nu_0 t + \Delta\varphi(t) + \varphi_0]$  avec :

$$\Delta\varphi(t) = \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{e}_r - \vec{e}_i) \cdot \Delta\vec{r}$$

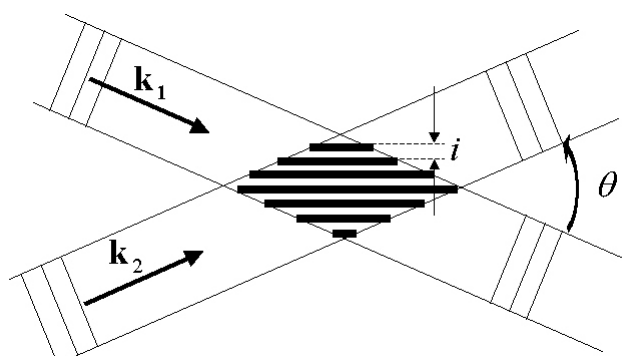
où  $\Delta\varphi(t)$  est la **modulation de la phase** de l'onde et  $\Delta\vec{r}$  est le déplacement de la cible.

Cette modulation de phase est mesurable au moyen d'un interféromètre à deux ondes où l'une des deux ondes, l'**onde de référence**, a une fréquence (ou une phase) constante tandis que l'autre onde, l'**onde de sonde** subit une modulation de fréquence (ou de phase) après réflexion sur la cible mobile.

## 1.2. L'interférométrie à deux ondes

### a) Interférence de deux ondes planes

On considère deux faisceaux lumineux collimatés monochromatiques dont les directions de propagation sont coplanaires et forment entre eux un angle  $\theta$ . Les deux faisceaux étant collimatés, on les considère comme deux ondes planes monochromatiques (voir figure).



Champ d'interférences de deux ondes planes

Chaque onde est définie par les fréquences constantes  $\nu_1$  et  $\nu_2$  et les vecteurs d'ondes  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$ . On suppose de plus que les fréquences sont voisines  $|\nu_1 - \nu_2| \ll \nu_1, \nu_2$ .

Les longueurs d'ondes associées sont :  $\lambda_1 = \frac{2\pi}{\|\vec{k}_1\|}$  et  $\lambda_2 = \frac{2\pi}{\|\vec{k}_2\|}$ . Les représentations réelles des champs ondulatoires sont :  $s_1 = A_1 \cos(2\pi\nu_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_{01})$  et  $s_2 = A_2 \cos(2\pi\nu_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_{02})$ .

On peut représenter ces vibrations par une expression complexe :

$s_i = \Re\{A_i \exp[j(2\pi\nu_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r} + \varphi_{0i})]\}$ , avec  $i = 1, 2$ , où  $\Re$  signifie : « partie réelle de ».

La représentation complexe est traduite par un diagramme de Fresnel (voir figure). La superposition des deux champs ondulatoires se traduit par une somme vectorielle des vecteurs de Fresnel  $\vec{OM}_1$  et  $\vec{OM}_2$ . L'argument de l'amplitude complexe  $s_i$  est  $\varphi_i = 2\pi\nu_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r} + \varphi_{0i}$ . Le carré du module du vecteur  $\vec{OM}$  donne l'intensité lumineuse résultante (grandeur proportionnelle à la densité de puissance lumineuse)

$I = s \cdot s^* = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[\Phi(\vec{r}, t)]$ , où  $I_1 = A_1^2$ ,  $I_2 = A_2^2$  et

$\Phi(\vec{r}, t) = 2\pi(\nu_2 - \nu_1)t + (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} + \Phi_0$ . L'intensité lumineuse dans le champ d'interférence subit une double modulation sinusoïdale: **temporelle** à la fréquence  $\nu_2 - \nu_1$  à cause du terme  $\frac{2\pi(\nu_2 - \nu_1)t}{2\pi}$ , à cause du terme

$\frac{(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}}{2\pi}$ . La **période** de modulation spatiale est par définition l'**interfrange** :  $i = \frac{2\pi}{\|\vec{k}_2 - \vec{k}_1\|}$ .

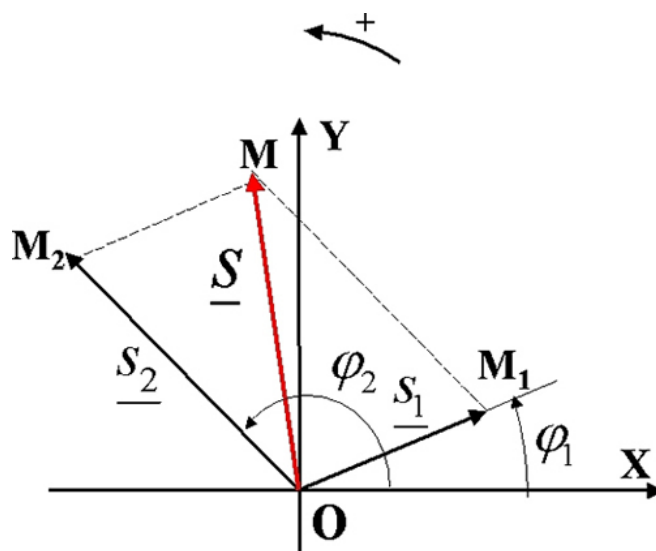


Diagramme de Fresnel

Elle s'exprime en fonction de la longueur d'onde moyenne  $\lambda$  des deux ondes et de l'angle  $\theta$  entre les deux faisceaux :

$$I = \frac{\lambda}{2} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

### Fondamental

L'intensité lumineuse du champ d'interférence peut s'écrire sous la forme

$$I = I_0(1 + m \cos \Phi) \quad \text{où} \quad m = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \quad \text{est le contraste des interférences et } I_0 = I_1 + I_2 \text{ est l'intensité moyenne.}$$

\* \*  
\*

Pour en savoir plus, vous pouvez consulter les références suivantes : (1 [Laser Ultrasonics], 2 [Optical Remote measurement of Ultrasound], 3 [Génération et détection optiques d'ondes élastiques], 4, 5)

## 2. L'interférométrie hétérodyne

### 2.1. Interféromètre hétérodyne

#### Définition

Dans un **interféromètre hétérodyne**, au moins l'une des deux ondes (référence ou sonde) subit un changement de fréquence  $\pm \nu_b$ , positif ou négatif, typiquement de l'ordre de 40 MHz à 100 MHz.

## Exemple

Considérons comme exemple l'interféromètre de Royer-Dieulesaint décrit par la figure 2 [3 [Génération et détection optiques d'ondes élastiques]].

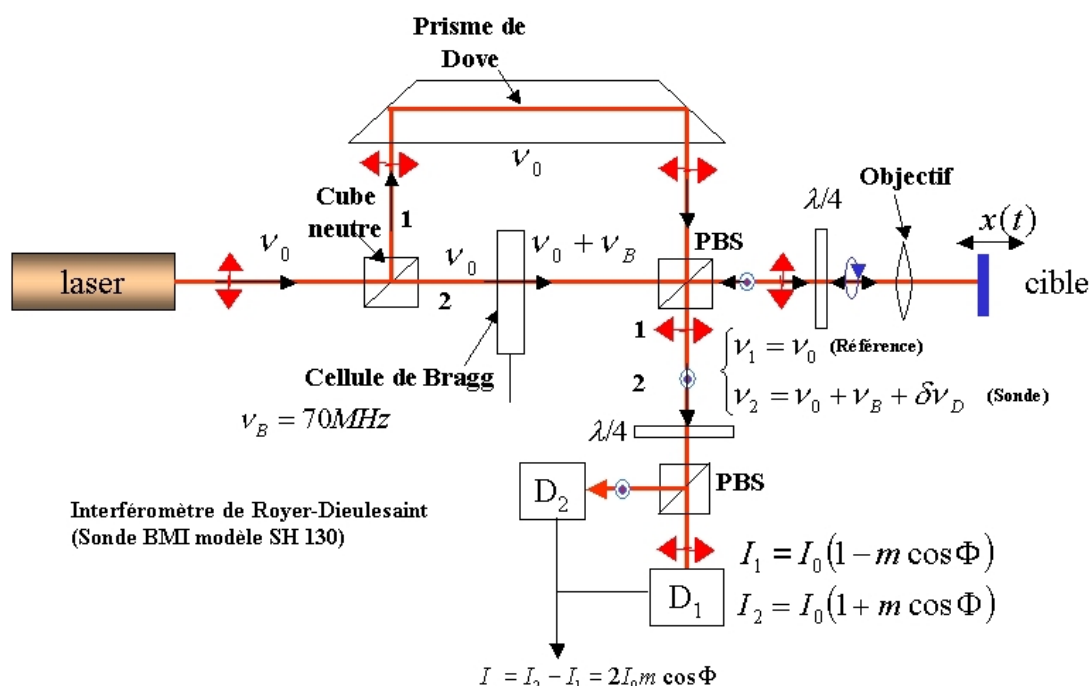


Figure 2 - Interféromètre hétérodyne de Royer-Dieulesaint

Cet interféromètre hétérodyne constitue la base d'un vibromètre laser. Il a été conçu pour la mesure de vibrations ultrasonores jusqu'à des fréquences de 35 MHz. Le montage optique original de cet interféromètre est un interféromètre hybride de Mach-Zehnder et de Michelson. Le montage optique utilise une onde laser polarisée dans le plan horizontal. Elle est divisée par un cube neutre, sans changement d'état de polarisation, en une onde de référence qui est réfléchiée et une onde de sonde qui est transmise. L'onde de référence subit deux réflexions totales dans un prisme de Dove puis elle est renvoyée vers les photodiodes. La fréquence de l'onde de référence est  $\nu_1 = \nu_0$ .

L'onde de sonde traverse une cellule de Bragg qui décale sa fréquence de  $\nu_B = +70$  MHz. Après la cellule de Bragg, la fréquence est  $\nu_0 + \nu_B$ . L'onde de sonde est totalement transmise en direction de la cible par un cube séparateur de polarisation avec une polarisation horizontale. Elle traverse une lame quart-d'onde avant d'être focalisée sur la cible où elle subit le décalage Doppler  $\delta\nu_D$ . La lumière rétrodiffusée est réfléchiée par le cube séparateur de polarisation car sa polarisation est devenue verticale après la traversée double de la lame quart-d'onde. Enfin, l'onde de sonde, qui a une fréquence  $\nu_2 = \nu_0 + \nu_B + \delta\nu_D$ , interfère avec l'onde de référence de fréquence  $\nu_1 = \nu_0$ .

Les signaux d'interférence sur les photodiodes  $D_1$  et  $D_2$  sont :  $I_1 = I_0(1 - m \cos \Phi)$  et  $I_2 = I_0(1 + m \cos \Phi)$ .

La différence des courants est  $I = 2I_0m \cos \Phi$  avec un déphasage

$$\Phi = 2\pi\nu_B t + 2\pi \int_0^t \delta\nu_D(t) dt + \Phi_0 \text{ avec } \delta\nu_D(t) = \frac{\vec{v}(t) \cdot (\vec{e}_r - \vec{e}_i)}{\lambda}$$

$$\text{D'où } \Phi = 2\pi\nu_B t + \frac{4\pi}{\lambda} (\vec{e}_r - \vec{e}_i) \cdot \int_0^t \vec{v}(t') dt' + \Phi_0 = 2\pi\nu_B t + \frac{4\pi}{\lambda} (\vec{e}_r - \vec{e}_i) \cdot \Delta \vec{r} + \Phi_0$$

Le signal d'interférence est donc un signal sinusoïdal de fréquence  $\nu_B$  modulé en phase par le

$$\text{terme } \frac{4\pi}{\lambda} (\vec{e}_r - \vec{e}_i) \cdot \Delta \vec{r}(t)$$

La **modulation de phase** est apportée par le déplacement de la cible.

D'un autre point de vue, on peut aussi considérer le signal d'interférence comme un signal sinusoïdal modulé en fréquence, avec une fréquence porteuse  $\nu_B$  et une modulation de fréquence  $\delta\nu_D(t) = \frac{\vec{v}(t) \cdot (\vec{e}_r - \vec{e}_i)}{\lambda}$  dépend de la vitesse instantanée  $\mathbf{v}(t)$ .

On a donc deux associations équivalentes suivantes :

1. Modulation de phase  $\Leftrightarrow$  déplacement
2. Modulation de fréquence  $\Leftrightarrow$  vitesse

Les vitesses vibratoires ultrasonores sont généralement inférieures à 1 m/s ce qui correspond à des décalages Doppler inférieurs à 4 MHz (pour  $\lambda = 500$  nm). Cette fréquence est généralement inférieure à la fréquence de Bragg  $\nu_B$ . Pour extraire la vitesse, il faut effectuer une démodulation du signal d'interférence. C'est une démodulation de fréquence analogue à celle qui est effectuée dans les récepteurs radio FM. La figure 3 montre la simulation d'un signal d'interférence hétérodyne obtenu avec une cible en vibration harmonique (courbe continue rouge) de fréquence égale à 1/20 de la fréquence de Bragg  $\nu_b$  et d'amplitude égale à une longueur d'onde optique.

### Signal hétérodyne d'une vibration harmonique

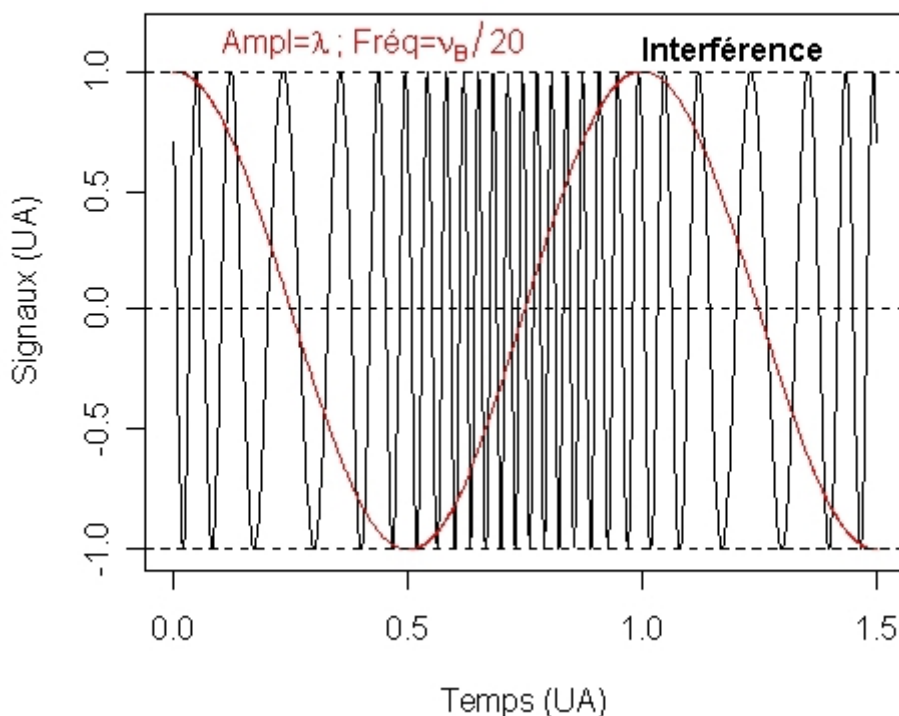


Figure 3 - Signal d'un interféromètre hétérodyne pour une cible en oscillation sinusoïdale

Le décalage Doppler maximum est égal à  $\pm \frac{\pi}{5} \nu_B$ . Le spectre correspondant est montré sur la figure 4.

## Spectre du signal hétérodyne

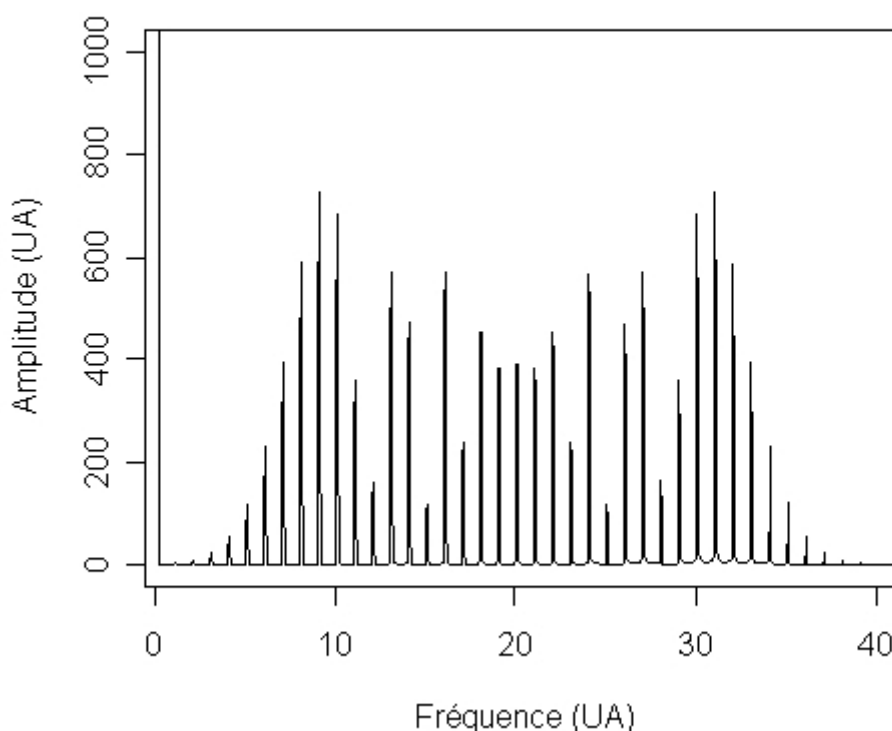


Figure 4 - Spectre calculé par FFT sur le signal hétérodyne de la figure 3

Si la fréquence de Bragg est  $\nu_B = 20$  MHz, alors la fréquence de la vibration sinusoïdale qui est montrée dans la figure 3 est de 1 MHz. Le spectre de la figure 4 est centré sur la fréquence de la porteuse qui est de 20 MHz et qui s'étend sur environ  $\pm 15$  MHz autour de la fréquence centrale. Le circuit optoélectronique de détection doit donc avoir une bande passante minimale de 30 MHz pour transmettre sans perte toute l'information vibratoire portée par le signal d'interférence.

La bande passante  $\Delta f$  que doit avoir le système de détection peut être calculée par application de la règle de Carlson :  $\Delta f = 2(\Delta f_{Dmax} + f_{smax})$ , où  $\Delta f_{Dmax}$  est le décalage Doppler maximum et  $f_{smax}$  est la fréquence maximale du spectre de la vitesse vibratoire, que l'on suppose borné.

D'où on calcule une bande passante  $\Delta f = 2\left(\frac{\pi}{5}\nu_B + \frac{\nu_B}{20}\right) \approx 27$  MHz, qui est en accord avec le spectre de la figure 4.

L'interféromètre hétérodyne a une bande passante limitée. Pour le montrer, supposons que l'on souhaite mesurer une vibration sinusoïdale de même amplitude que dans l'exemple précédent mais de fréquence égale à 2 MHz. D'après la règle de Carlson, les fréquences  $\Delta f_{Dmax}$  et  $f_{smax}$  doubleront. Il sera donc nécessaire d'avoir une bande passante de d'environ 60 MHz pour éviter toute perte d'information.

Or avec une fréquence de Bragg  $\nu_B = 20$  MHz, la bande passante maximale se trouve entre 0 et 40 MHz. La bande passante de l'interféromètre hétérodyne est limitée par le choix de la fréquence de Bragg  $\nu_B$ . Il faut donc ajuster cette fréquence de Bragg en fonction des fréquences et des amplitudes des vibrations à mesurer.

La bande passante de l'électronique de détection doit être strictement limitée à la bande utile qui est nécessaire à la mesure. Dans le cas contraire, on augmente inutilement le bruit ce qui a pour effet de détériorer le rapport signal à bruit. Le rapport signal à bruit d'un interféromètre hétérodyne peut être comparé à celui d'un interféromètre homodyne ayant la même étendue de mesure et même bande passante de mesure vibratoire (§ « Etude de cas »).

## Complément

Le changement de fréquence intervenant dans une **cellule de Bragg** est obtenu par **interaction acousto-optique**. Le faisceau lumineux interagit avec une onde acoustique ultrasonore progressive de fréquence  $\nu_b$  se propageant dans un milieu solide transparent (souvent du dioxyde de tellure :  $\text{TeO}_2$ ). L'onde acoustique croise l'onde optique pratiquement à angle droit. Le changement de fréquence subie par l'onde optique dans la diffraction de Bragg est égal à la fréquence de l'onde acoustique. Ce changement de fréquence peut s'interpréter simplement en considérant que l'interaction acousto-optique est une collision inélastique entre un photon incident d'énergie  $h\nu_0$  et un phonon d'énergie  $h\nu_b$ . Le phonon est annihilé pendant la collision; son énergie et sa quantité de mouvement est transférée au photon incident. Le photon diffusé ayant gagné l'énergie et la quantité de mouvement du phonon est dévié dans la collision. L'énergie du photon diffusé est en vertu du principe de la conservation de l'énergie :  $h(\nu_0 + \nu_b)$ , d'où l'augmentation de fréquence  $\nu_b$  de la fréquence du photon pendant l'interaction acousto-optique. La déviation du faisceau dans la diffraction de Bragg peut s'interpréter d'un point de vue classique. Une onde acoustique longitudinale crée, par le biais de l'effet élasto-optique, une modulation de l'indice de réfraction du milieu avec une période égale à la longueur de l'onde acoustique  $\lambda_b = c_a/\nu_b$ , où  $c_a$  est la célérité de l'onde acoustique ( $c_a = 4200$  m/s dans le  $\text{TeO}_2$ ). Les zones comprimées par l'onde élastique ont un indice de réfraction plus élevées que les zones dilatées. Si l'onde acoustique a une fréquence  $\nu_B = 80$  MHz, alors sa longueur d'onde dans le  $\text{TeO}_2$  est égale à  $52,5 \mu\text{m}$ . La longueur d'onde coïncide avec le pas du réseau d'indice induit par l'onde acoustique. La diffraction d'un faisceau lumineux le réseau d'indice de réfraction créé par une onde acoustique est analogue à la diffraction de Bragg d'un faisceau de rayons X par les plans atomiques d'un cristal. Appliquée à la l'interaction acousto-optique, la relation de Bragg s'écrit :  $2d \cdot \sin(\theta) = m \cdot \lambda$ , où  $\theta$  est l'angle du faisceau par rapport aux plans,  $d$  est la période du réseau,  $\lambda$  est la longueur d'onde optique dans le milieu et  $m$  est l'ordre de diffraction.

### 3. Mesures de plusieurs composantes de déplacement ou de vitesse

L'utilisation d'un seul faisceau de sonde limite la mesure de déplacement ou de vitesse à une seule composante. Pour mesurer plus une deuxième composante, il faudra nécessairement utiliser un deuxième faisceau et pour mesurer trois composantes, un troisième faisceau. On verra d'abord la mesure de deux composantes (§ 3.1 à 3.3), puis de trois composantes (§3.4).

#### 3.1. Mesures vibratoires « dans-le-plan » et « hors-plan »

##### Rappel

Rappelons que la mesure du déplacement ou de la vitesse d'une cible peut se faire avec un seul faisceau optique à condition que la direction du vecteur sensibilité  $\vec{s} = \vec{e}_r - \vec{e}_i$  ne soit pas perpendiculaire au déplacement  $\vec{r}$  ou à la vitesse  $\vec{v}$ . Dans la configuration de mesure la plus courante, la direction du faisceau de sonde est normale à la surface de la cible et la lumière est rétrodiffusée dans la direction du faisceau incident. Par conséquent, on ne détecte que la composante « hors-plan »  $\vec{v}_n$  car la direction du vecteur sensibilité est :  $\vec{s} = -2\vec{e}_i = 2\vec{e}_r$  (figure 5).

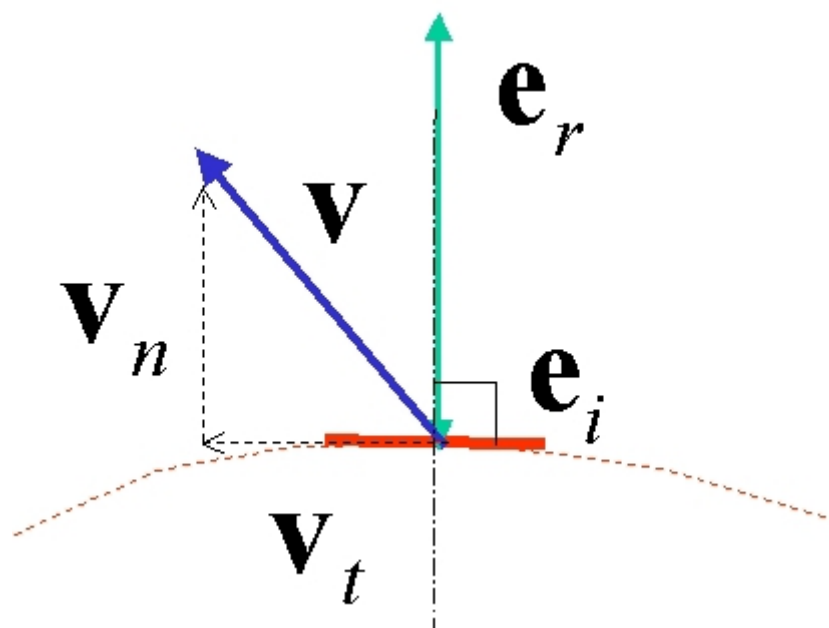


Figure 5 - Composantes « dans-le-plan » et « hors-plan » de la vitesse de la cible

Lorsque la surface est courbée, le plan tangent à la surface de la cible sert de référence pour définir la notion de composante « hors-plan » et « dans-le-plan ».

La mesure de la composante transversale  $\mathbf{v}_t$ , appelée composante « dans le plan » n'est pas accessible avec un faisceau sonde en incidence normale. Pour accéder à la composante transversale, il faut nécessairement que le faisceau de sonde soit incident en dehors de la normale. Dans ce cas, le décalage Doppler est :  $\delta\nu_D = (\vec{v}_n + \vec{v}_t) \cdot \vec{s} / \lambda$ . Il y a deux inconnues : la composante normale  $\mathbf{v}_n$  et la composante transversale  $\vec{v}_t$  de la vitesse. Si la composante normale est a priori négligeable devant la composante transverse, un seul mesurage permet d'accéder à la composante « dans-le-plan »  $\vec{v}_t$ . Dans le cas contraire, il faudra au moins effectuer deux mesurages dans des directions différentes du faisceau de sonde.

Soit  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$  les vecteurs sensibilités correspondant aux deux configuration des faisceaux. Les deux décalages Doppler sont :  $\delta\nu_{D1} = (\vec{v}_n + \vec{v}_t) \cdot \vec{s}_1 / \lambda$  et  $\delta\nu_{D2} = (\vec{v}_n + \vec{v}_t) \cdot \vec{s}_2 / \lambda$ . Choisissons deux directions symétriques par rapport à la normale. Les vecteurs sensibilités sont donc :  $\vec{s}_1 = \vec{s}_n + \vec{s}_t$  et  $\vec{s}_2 = \vec{s}_n - \vec{s}_t$  (figure 6).

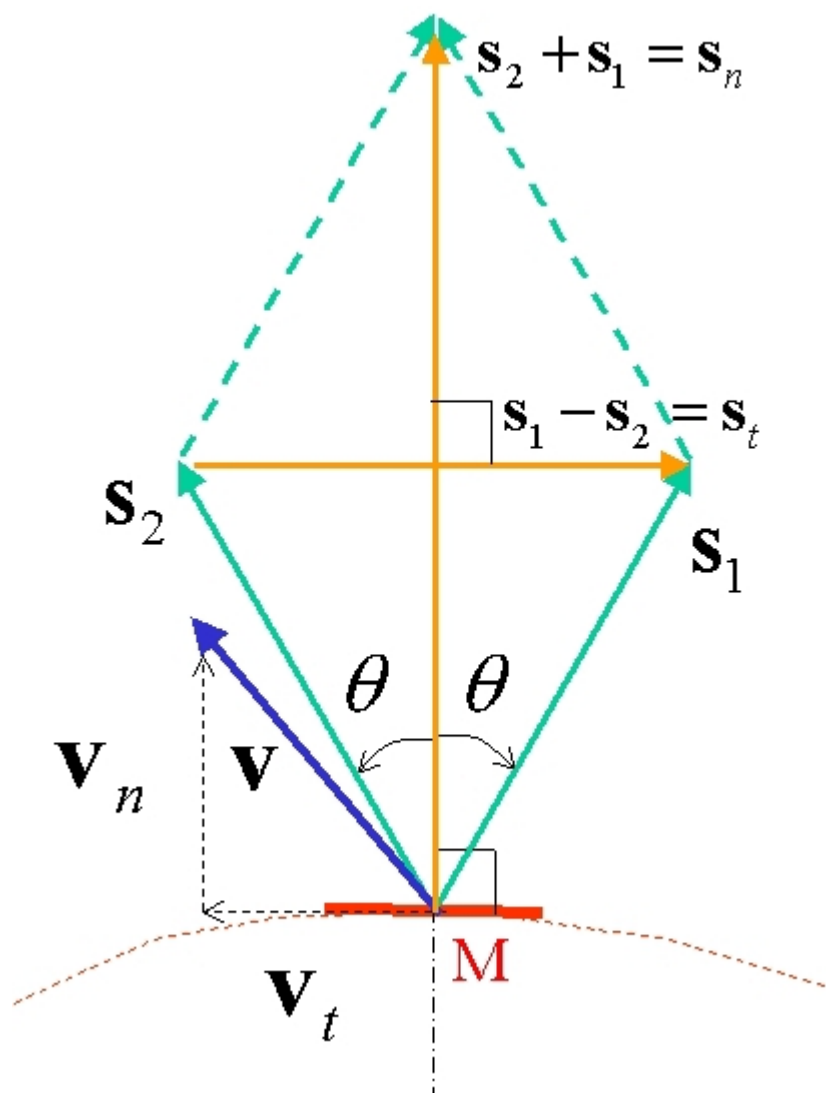


Figure 6 - Mesure des composantes « dans le plan » et « hors-plan » avec deux faisceaux sonde

La soustraction des deux décalages Doppler 1-2 donne :  $\delta v_{D_1} - \delta v_{D_2} = 2\vec{v} \cdot \vec{s}_t / \lambda$ . permet d'extraire la composante « dans-le-plan » tandis que la somme de deux décalages Doppler  $\delta v_{D_1} + \delta v_{D_2} = 2\vec{v} \cdot \vec{s}_n / \lambda$  permet d'extraire la composante « hors-plan ». Si le phénomène étudié est répétable, on peut utiliser le même vibromètre laser pointé successivement sur le même point cible dans les deux directions  $\vec{s}_1$  et  $\vec{s}_2$ . Une solution plus rapide est d'employer deux vibromètres laser pour avoir deux mesures simultanées.

### Remarque

Il ne faut pas perdre de vue que le mesure d'un déplacement transversale ne peut pas être réalisé sur une surface parfaitement réfléchissante car il n'y aurait pas de lumière retrodiffusée. Si la surface est brillante, on peut appliquer sur la surface, dans le mesure du possible, une peinture avec un fort pouvoir rétro réfléchissant ou bien coller un d'adhésif qui a les même propriétés pour transformer la surface en une **cible coopérative**.

## 3.2. Vélocimétrie de surface

Lorsque l'on s'intéresse seulement à la vitesse transversale, la configuration de mesurage peut se limiter à deux faisceaux se croisant en un point de la cible et faisant entre eux un angle  $\theta$ .

Le plan des deux faisceaux de sonde contient la normale à la surface passant par le point M de la cible et on suppose que le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  est dans le plan des faisceaux. La lumière diffusée est collectée dans la direction de la bissectrice des deux faisceaux par un objectif de grande ouverture numérique (figure 7).

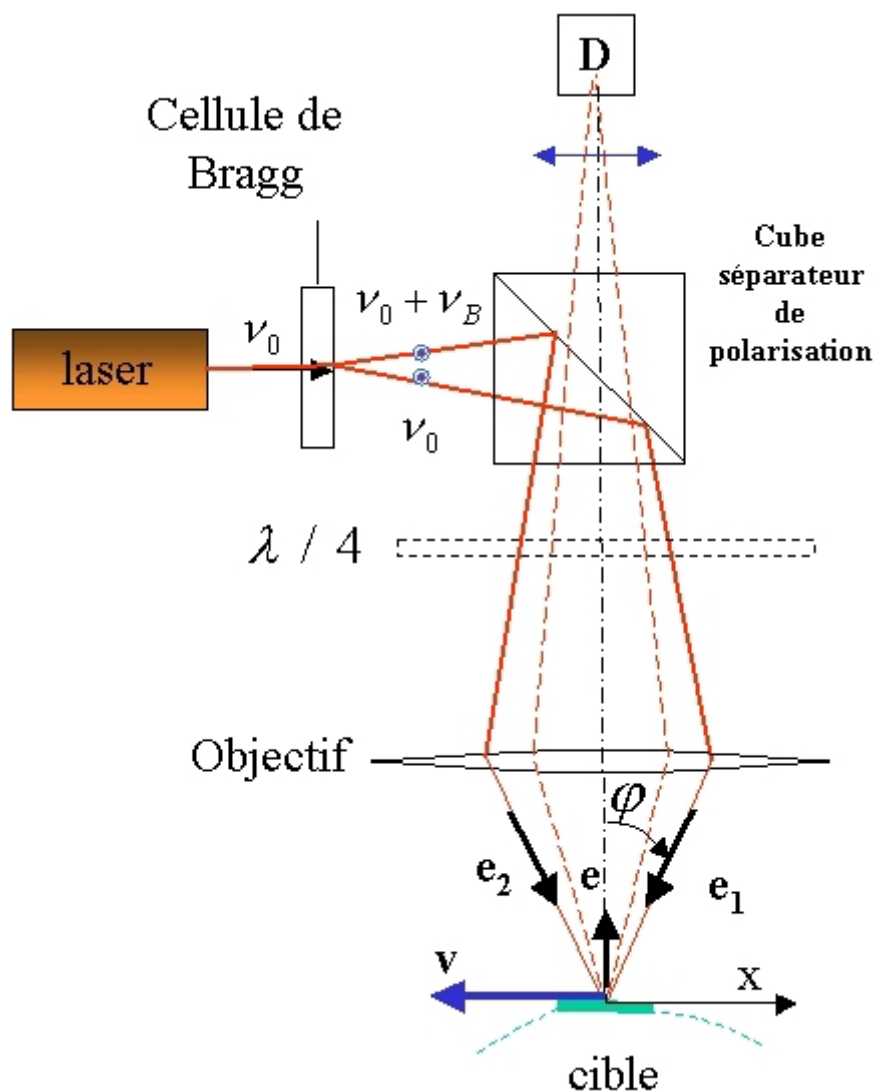


Figure 7 - Interféromètre hétérodyne sensible à la composante « dans-le-plan » de la vitesse ou du déplacement

Les directions d'incidences sont données par les vecteurs unitaires  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  et la direction d'observation de la lumière diffusée est celle du vecteur unitaire  $\vec{e}$ . Les deux faisceaux diffusés vers le photodétecteur ont les fréquences  $\nu_1 = \nu_0 + \delta\nu_{D1}$  et  $\nu_2 = \nu_0 + \delta\nu_{D2}$ , où  $\nu_b$  est le décalage en fréquence introduit par la cellule de Bragg sur le faisceau diffracté à l'ordre 1 et  $\delta\nu_{D1}$  et  $\delta\nu_{D2}$  sont les décalages Doppler  $\delta\nu_{D1} = \vec{v} \cdot (\vec{e} - \vec{e}_1)/\lambda$  et  $\delta\nu_{D2} = \vec{v} \cdot (\vec{e} - \vec{e}_2)/\lambda$ . Les deux faisceaux diffusés interfèrent au niveau du photodétecteur donnent un signal de modulation de fréquence  $f_1 = \nu_b + \vec{v} \cdot (\vec{e}_2 - \vec{e}_1)/\lambda = \nu_b + 2v \sin \varphi/\lambda$ , avec une fréquence porteuse égale à  $\nu_b$ . Ce type d'interféromètre est hétérodyne. La démodulation de fréquence du signal d'interférence donne un signal proportionnel à la vitesse transverse de la cible.

### 3.3. Anémométrie Laser Doppler (ALD) et Vélocimétrie Laser Doppler (VLD)

L'Anémométrie Laser Doppler est une technique de mesure d'écoulements gazeux. Elle est analogue à la technique de mesure de déplacements transverses d'une surface solide. Le gaz étant transparent, il faut l'ensemencer de petites particules de dimensions micrométriques ou submicrométrique qui sont entraînées par le gaz et qui donc la même vitesse que celui-ci. Les particules se comportent comme des cibles diffusant la lumière. L'instrument de mesure de vitesse ne doit pas faire obstacle à l'écoulement gazeux, il n'y a donc pas d'autre solution que de disposer les faisceaux de sonde au voisinage de la direction perpendiculaire à l'écoulement (figure 8).

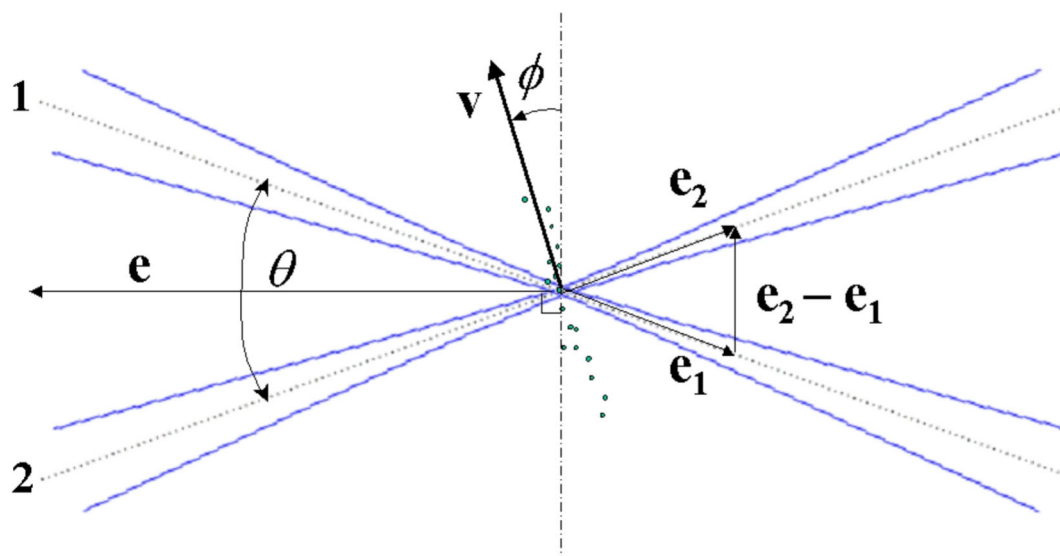


Figure 8 - Configuration des faisceaux utilisés en anémométrie Laser Doppler (ALD)

La configuration des faisceaux de sonde est la même que celle permettant des mesures de vitesses transverses. Les deux faisceaux sont focalisés dans une petite zone cible appelée volume de mesure (figure 9).

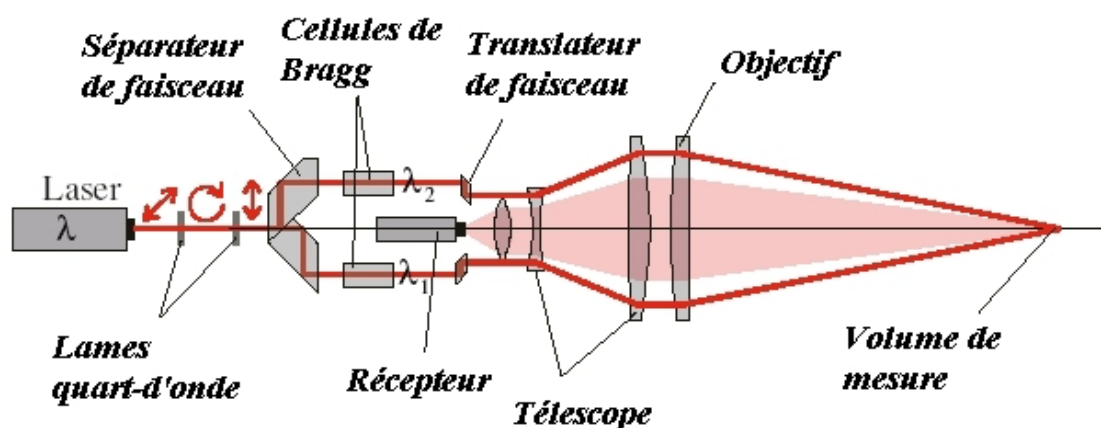


Figure 9 - Configuration générale d'un anémomètre laser Doppler

Le volume de mesure coïncide avec la zone de diamètre minimum des faisceaux laser.

Un faisceau laser a un profil transverse d'intensité de type gaussien :

$$I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right), \text{ où } r$$

est la distance d'un point à l'axe du faisceau et  $w$  est le rayon gaussien du faisceau, définie comme le rayon du cercle où l'éclairement est  $1/e^2 \approx 0,135$  de la valeur au centre  $r = 0$ . La

valeur minimale du rayon de faisceau au foyer est le **rayon de ceinture** :  $w_0 = (\lambda f)/(\pi w)$ , où  $f$  est la distance focale de l'objectif et  $w$  est le rayon de faisceau avant l'objectif.

Les particules qui traversent le volume de mesure diffusent la lumière dans toutes les directions avec une intensité non uniforme. La lumière est observée dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{e}$ . Avant diffusion les faisceaux ont respectivement les fréquences  $\nu_1 = \nu_0 + \nu_{b1}$  et  $\nu_2 = \nu_0 + \nu_{b2}$ , où  $\nu_{b1}$  et  $\nu_{b2}$  sont les fréquences de Bragg et  $\nu_0$  est la fréquence du laser. Le faisceau diffusé 1 ayant subi le décalage Doppler  $\delta\nu_{D1}$  a une fréquence  $\nu_1 = \nu_0 + \nu_{b1} + \delta\nu_{D1}$ ; il interfère avec le faisceau diffusé 2 qui a subi un décalage Doppler  $\delta\nu_{D2}$  de fréquence  $\nu_2 = \nu_0 + \nu_{b2} + \delta\nu_{D2}$ . Le signal d'interférence a une fréquence instantanée égale à la différence des deux fréquences :  $\nu_1 - \nu_2 = (\nu_{b1} - \nu_{b2}) + (\delta\nu_{D1} - \delta\nu_{D2})$ .

Les décalages Doppler sur les faisceaux 1 et 2 sont respectivement :  $\delta\nu_{D1} = \vec{v} \cdot (\vec{e} - \vec{e}_1)/\lambda$  et  $\delta\nu_{D2} = \vec{v} \cdot (\vec{e} - \vec{e}_2)/\lambda$ , où  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  sont les vecteurs unitaires des deux faisceaux incidents sur le volume de mesure. La différence des deux décalages Doppler est  $\delta\nu_D = \delta\nu_{D1} - \delta\nu_{D2} = \vec{v} \cdot (\vec{e}_2 - \vec{e}_1)/\lambda$ .

Le signal d'interférence est un signal modulé en fréquence :  $f_I = \nu_b + \vec{v} \cdot (\vec{e}_2 - \vec{e}_1)/\lambda$  avec une fréquence porteuse  $\nu_b = \nu_{b1} - \nu_{b2}$ . La démodulation du signal permet d'accéder au terme  $\delta\nu_D = \vec{v} \cdot (\vec{e}_2 - \vec{e}_1)/\lambda$  qui dépend de l'angle  $\phi$  entre la vitesse et le vecteur  $\vec{e}_2 - \vec{e}_1$  et de l'angle  $\theta$  entre les directions des deux vecteurs unitaires  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ . D'après la figure 9, on a  $\delta\nu_D = 2v \cdot \cos(\phi) \sin(\theta/2)/\lambda$ .

Le principe de mesurage qui est employé dans l'**Anémométrie Laser Doppler** peut être transposée pour mesurer des vitesses d'écoulements de liquides. La technique de mesure analogue à l'ALD dans les liquides s'appelle la **Vélocimétrie Laser Doppler** (VLD). Le liquide doit entraîner de petites particules diffusant la lumière. C'est ainsi que la vitesse de l'écoulement sanguin peut être mesuré grâce à la diffusion de composants en suspension dans le sang, comme les globules et les plaquettes.

### 3.4. Mesures 3D

Il faut toutefois remarquer que les mesurages dans deux directions coplanaires avec la normale ne donnent que la partie de la composante transverse qui se trouve dans le plan des faisceaux. Il faut donc nécessairement une troisième direction de mesurage pour accéder aux trois composantes de la vitesse. L'utilisation de trois vibromètres laser a été mis en œuvre dans le système PSV-400-3D de Polytec®. Il permet la mesure des trois composantes cartésiennes de la vitesse ou de déplacement avec un balayage automatique de la surface. (voir [https://www.dbkes.com.tr/brosur/psv\\_400\\_3D.pdf](https://www.dbkes.com.tr/brosur/psv_400_3D.pdf)) (consulté le 12/12/2023)

Nous allons montrer dans ce paragraphe que la mesure des trois composantes de la vitesse d'un point nécessite seulement trois faisceaux de sonde. Soient  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  trois vecteurs

$$\mathbf{e}_i \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix}$$

unitaires définissant trois directions non coplanaires dont les composantes sont notées : dans un repère Oxyz du laboratoire (Figure 10).

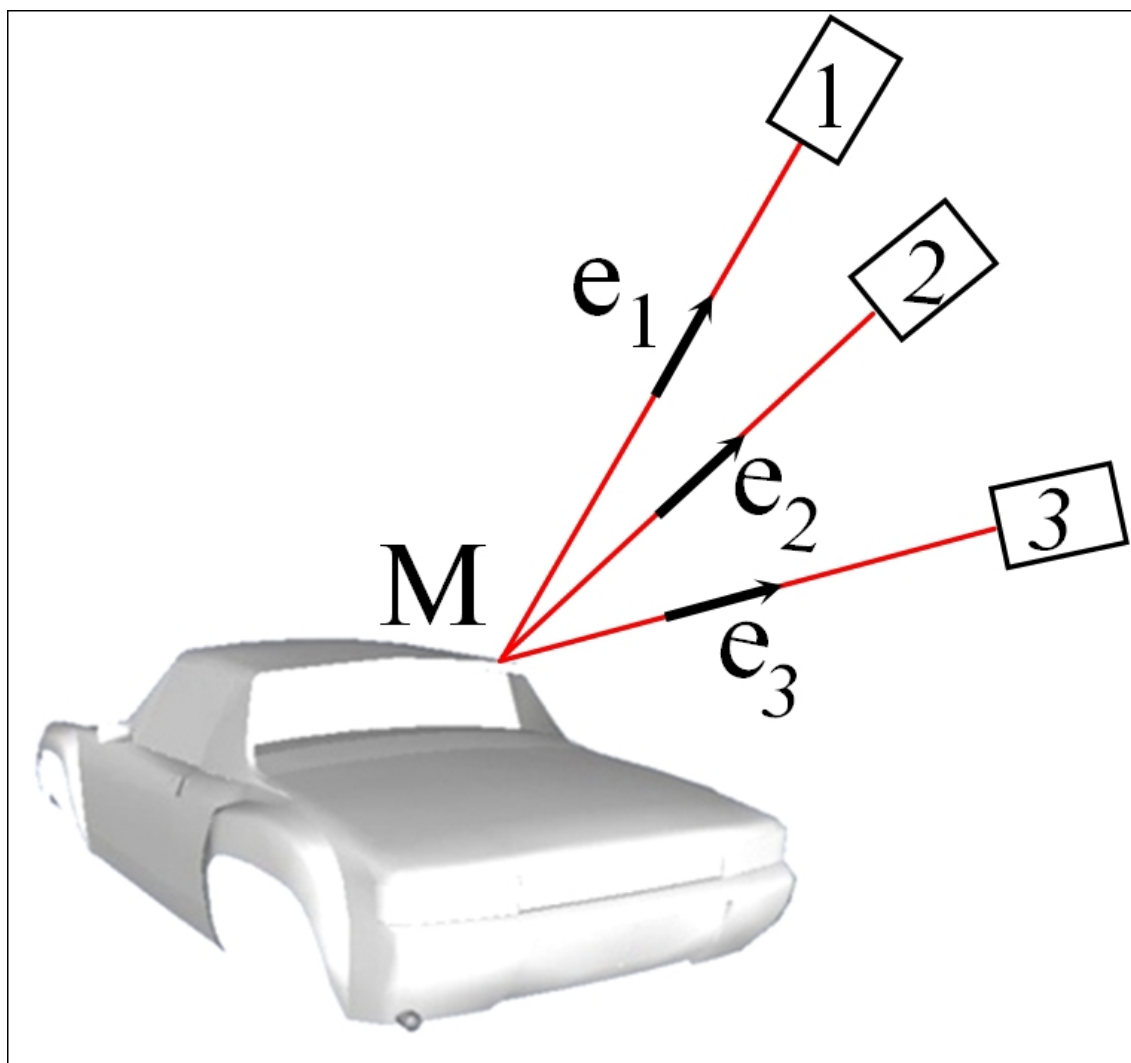


Figure 10 - Configuration à trois vibromètres laser permettant la mesure des trois composantes cartésiennes de la vitesse ou du déplacement d'un point

Les faisceaux de sonde des trois vélocimètres (ou vibromètres) sont focalisés en un point M

dont on veut mesurer la vitesse  $\vec{V} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ . Chaque vélocimètre mesure un signal de vitesse qui est proportionnel au décalage Doppler  $\delta\nu_{Di}$  subis par le faisceau de sonde rétrodiffusé par la cible M dans la direction  $\vec{e}_i$ .

On suppose que trois sondes ont la même longueur d'onde  $\lambda$ . Par conséquent, le décalage

Doppler sur le ième faisceau est : 
$$\delta\nu_{Di} = \frac{2\vec{V} \cdot \vec{e}_i}{\lambda}$$

La composante de la vitesse dans la direction de  $\vec{e}_i$  est :

$$S_i = \frac{\lambda}{2} \delta\nu_{Di} = \vec{V} \cdot \vec{e}_i = \alpha_i V_x + \beta_i V_y + \gamma_i V_z$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \text{ où}$$

On peut résumer les trois relations linéaires sous forme matricielle :

$$\vec{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}, \text{ et } \vec{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice  $\mathbf{M}$  est non nul car les vecteurs unitaires  $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$  sont linéairement indépendants. On peut obtenir les composantes de la vitesse dans le repère Oxyz par la relation  $\mathbf{V}=\mathbf{M}^{-1}.\mathbf{S}$ , où  $\mathbf{M}^{-1}$  est l'inverse de la matrice  $\mathbf{M}$ .

## 4. Mesures rotationnelles

Dans certaines situations, il est nécessaire de mesurer la vitesse de rotation d'un objet solide. On verra dans § 4.1 le principe de la mesure d'une composante du vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  d'un solide. Dans le § 4.2, on décrira le principe de la mesure d'un gyromètre laser. Il s'agit d'un instrument de précision embarqué, basé sur un interféromètre de Sagnac, et qui permet de mesurer les trois composantes de la vitesse de rotation.

### 4.1. Vélocimètre rotationnel

Supposons que l'on cherche à mesurer la vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$  d'un cylindre en rotation autour d'un axe. On peut penser utiliser un vélocimètre à un faisceau pour détecter la rotation. Le faisceau de sonde est focalisé en un point M de la surface dont la vitesse linéaire  $\vec{\mathbf{v}}$  possède une composante dans la direction du faisceau de sonde (figure 11).

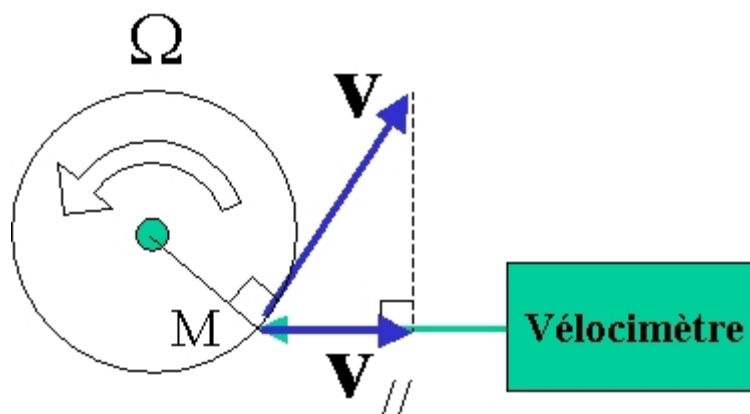


Figure 11 - Mesure de la vitesse angulaire d'un cylindre tournant par mesure d'une composante de la vitesse

La surface du cylindre doit bien diffuser la lumière pour obtenir le meilleur rapport signal à bruit possible. L'utilisation d'un seul faisceau de sonde oblige à étalonner le vélocimètre dans la configuration de mesurage pour établir la relation de proportionnalité entre la vitesse angulaire et la composante de la vitesse linéaire qui est mesuré.

Si la surface de l'objet en rotation n'a pas une symétrie de révolution autour de l'axe de rotation, la mesure de la la vitesse angulaire instantanée avec la précédente méthode ne sera pas possible à cause de l'influence de la forme de la surface sur le signal de vitesse (figure 12).

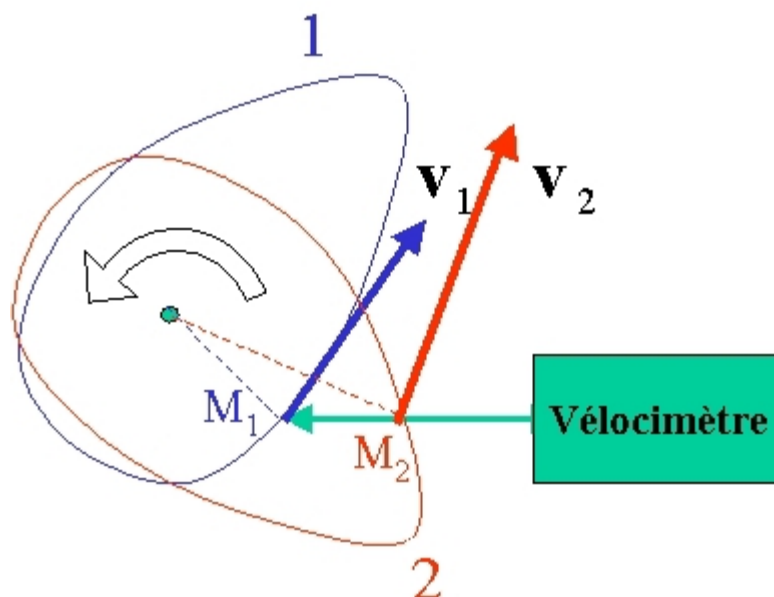


Figure 12 - Influence de la forme de l'objet en rotation sur la mesure de la vitesse lorsqu'on n'utilise qu'un seul faisceau sonde

Le point d'intersection du faisceau de sonde avec la surface étant variable au cours de la rotation, le signal de vitesse sera variable même si la vitesse de rotation est constante.

Pour mesurer une vitesse angulaire de rotation qui soit indépendante des dimensions et de la forme de l'objet, il faut une configuration à deux faisceaux de sondes parallèles. A chaque faisceau on fait correspondre un interféromètre (figure 13).

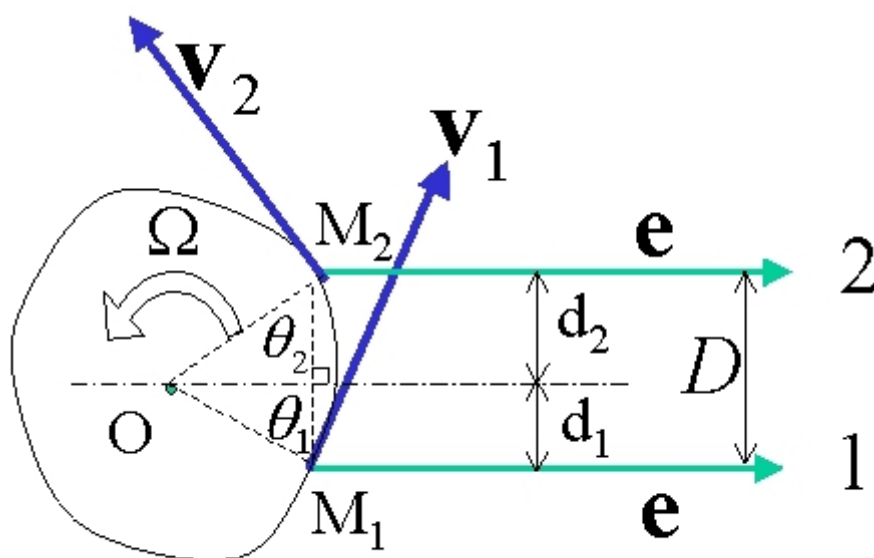


Figure 13 - Principe d'un vélocimètre rotationnel à deux faisceaux parallèles

Nous allons montrer que le signal de vitesse angulaire peut être obtenu à partir de la différence des deux décalages Doppler subit par les deux faisceaux de sonde. Soit  $\vec{e}$  le vecteur unitaire indiquant la direction de rétrodiffusion des deux faisceaux de sonde. Les deux décalages Doppler après rétrodiffusion sur les points  $M_1$  et  $M_2$  sont respectivement :  $\delta\nu_{D1} = 2\vec{v}_1 \cdot \vec{e} / \lambda$  et  $\delta\nu_{D2} = 2\vec{v}_2 \cdot \vec{e} / \lambda$ .

La différence des deux décalages est :

$$\delta v = 2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{e} / \lambda = 2 (\vec{v}_0 + \vec{\Omega} \times \overline{\mathbf{OM}}_2 - \vec{v}_0 + \vec{\Omega} \times \overline{\mathbf{OM}}_1) \cdot \vec{e} / \lambda$$

On a utilisé les formules de la cinématique du solide :  $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{\Omega} \times \overline{\mathbf{OM}}_1$  et  $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{\Omega} \times \overline{\mathbf{OM}}_2$ , où  $\vec{v}_0$  est la vitesse de translation de l'axe. En utilisant la propriété de permutation du produit mixte, on obtient :

$$\delta v = \left(\frac{2D}{\lambda}\right) \vec{\Omega} \cdot \vec{e}_z$$

où  $\vec{e}_z = \vec{e}_x \times \vec{e}_y$  est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan des deux faisceaux. Ce résultat montre que l'on mesure la composante du vecteur rotation qui se trouve dans la direction perpendiculaire au plan des deux faisceaux. La mesure n'est pas influencée par une éventuelle translation de l'axe de rotation. La sensibilité de la mesure croît linéairement avec la distance  $D$  entre les deux faisceaux.

### Remarque

Pour obtenir une détection optimale, la forme de la surface n'a pas d'importance à condition de sonder un solide indéformable. Une translation du vélocimètre dans le plan des faisceaux n'a pas d'influence sur la mesure. Toutefois, il existe une position de l'appareil qui optimise le rapport signal à bruit.

## 4.2. Gyromètre laser à fibre ou « gyrofibre »

On considère un interféromètre de Sagnac constitué d'une bobine de fibre optique de longueur totale  $L$  de rayon  $R$ . (figure 14)

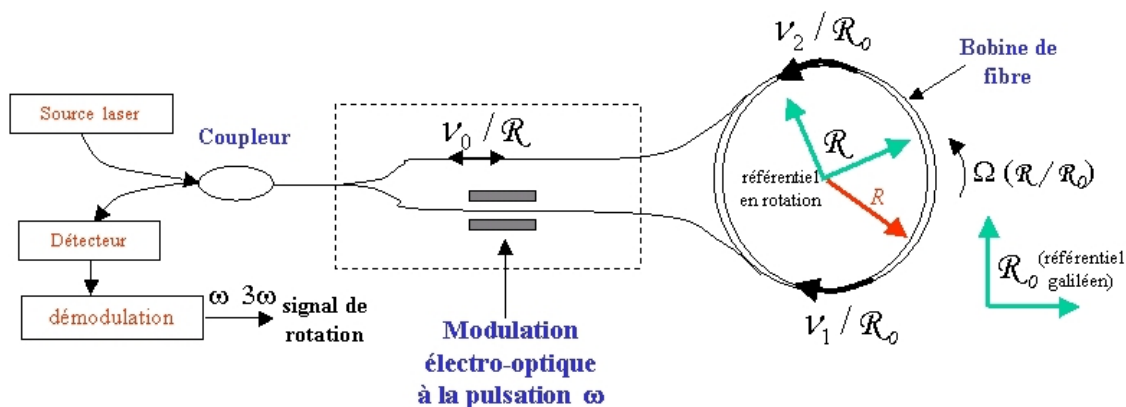


Figure 14 - Interféromètre de Sagnac à fibre

Un gyromètre laser est un instrument capable de mesurer de très faibles vitesses de rotation. Il fait partie des instruments de navigation embarqués dans les avions et les navires. L'ensemble du dispositif : source laser et bobine de fibre optique forme un bloc solide qui définit un référentiel  $\mathcal{R}$ . Supposons que la rotation du gyromètre se fait dans le plan des spires avec une vitesse angulaire  $\Omega(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)$ , définie par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}_0$  supposé galiléen. On montrera par la suite, qu'après une longueur de propagation  $L$ , la déphasage entre les deux ondes contra-propagatives est :

$$\Phi = \frac{4\pi L R \Omega}{c \lambda}$$

La grande sensibilité d'un gyromètre à fibre provient essentiellement de la grande longueur  $L$  de fibre de l'interféromètre, typiquement de plusieurs centaines de mètres. Le rapport signal-à-bruit de l'instrument est augmentée en utilisant une modulation de phase sinusoïdale sur les deux ondes, de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $\Phi_0$ , au moyen d'un dispositif électro-optique.

$$\Phi = \frac{4\pi L R\Omega}{c \lambda} + \Phi_0 \cos \omega t$$

Le déphasage total, de la forme  $\Phi = \frac{4\pi L R\Omega}{c \lambda} + \Phi_0 \cos \omega t$ , donne une réponse interférentielle  $P = P_0(1 + m \cos \Phi)$  non linéaire. Par conséquent, la modulation de phase sinusoïdale  $\omega$  fait apparaître dans le signal d'interférence les harmoniques :  $\omega, 2\omega, 3\omega$ , etc.

Une **détection synchrone** permet de mesurer l'amplitude des composantes harmoniques :  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$

Elle fournit un moyen très sensible de mesure de la vitesse angulaire  $\Omega$ . L'absence de composante à  $\omega$  correspond à l'absence de rotation du gyromètre (Figure 15).

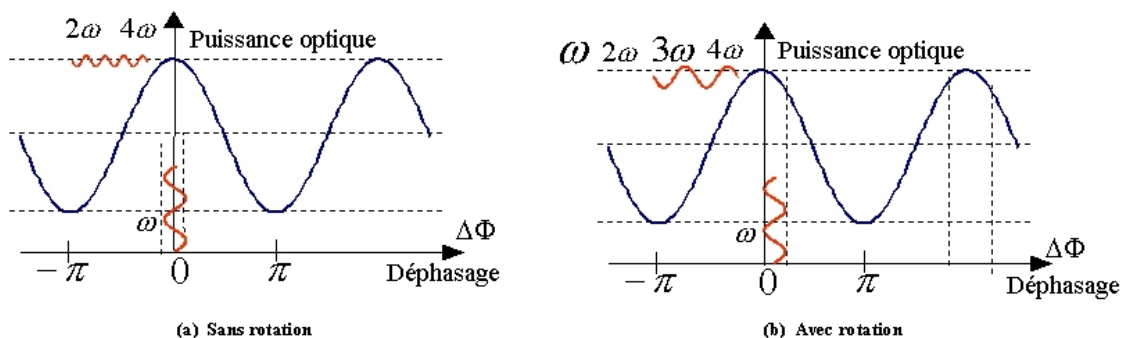


Figure 15 - Utilisation d'une modulation pour porter le signal de rotation d'un interféromètre de Sagnac

La résolution de l'instrument est déterminé par le rapport signal à bruit du signal démodulé, qui dépend du rapport signal à bruit du signal d'interférence. Il existe une longueur de fibre qui optimise ce rapport. L'atténuation de la fibre comprend les pertes par macro-courbures et micro-courbures et l'atténuation intrinsèque de la fibre.

Lorsque l'on souhaite mesurer les trois composantes du vecteur rotation  $\vec{\Omega}$ , il faut intégrer trois interféromètres de Sagnac dont les bobines sont mutuellement perpendiculaires. L'intégration des vitesses angulaires donne l'orientation absolue du vaisseau dans l'espace.

### Complément

L'effet Sagnac peut être considéré comme découlant de l'effet Doppler. La source laser a une fréquence  $\nu_0$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié à la fibre et sa longueur d'onde dans le vide  $\lambda = c/\nu_0$ . La propagation des ondes dans les deux sens opposés est symétrique dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ; elles ont donc la même fréquence  $\nu_0$ .

En revanche, dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$  du laboratoire, il existe une dissymétrie entre les deux sens de propagation et les fréquences des deux ondes, décalées par l'effet Doppler sont  $\nu_1 = \nu_0(1 - v/c)$  et  $\nu_2 = \nu_0(1 + v/c)$ , avec  $v = R\Omega$ , la vitesse linéaire d'un élément de fibre dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ . Les deux ondes contra-propagatives arrivent au niveau du photodétecteur en ayant parcouru le même chemin optique  $L_0$  dans  $\mathcal{R}_0$ .

La différence entre la longueur propre  $L$  de la fibre dans  $\mathcal{R}$  et la longueur impropre  $L_0$  dans  $\mathcal{R}_0$  est du second ordre en  $v/c$  et peut par conséquent être négligée car  $R\Omega \ll c$ . Les variations de phase des ondes sur le chemin optique  $L$  sont  $\Delta\varphi_1 = 2\pi\nu_1 L/c$  et  $\Delta\varphi_2 = 2\pi\nu_2 L/c$ , d'où le déphasage correspondant est :

$$\Phi = \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 = \frac{4\pi L R\Omega}{c \lambda}$$

Cette dernière formule donne le déphasage entre les deux ondes qui exprime l'effet Sagnac.

### Remarque

Si on effectue le raisonnement précédent dans le référentiel tournant, c'est à dire non-galiléen, on conclut qu'il n'y a pas d'effet Sagnac. Ce paradoxe n'est résolu que si l'on fait un raisonnement dans le référentiel non galiléen en prenant en compte la théorie de la relativité générale. La théorie de la relativité restreinte ne doit être appliquée qu'à des référentiels galiléens.

# III. Etudes de cas

## 1. Vélocimètre hétérodyne

Le tableau ci-dessous montre les spécifications d'un vibromètre industriel qui intègre un interféromètre hétérodyne avec une cellule de Bragg à la fréquence  $\nu_B = 40$  MHz.

Grandeur mesurée	Vitesse
Traitement du signal	Numérique
Domaine de fréquences	0 – 22kHz
Gammes de mesures	3
Vitesse crête (mm/s)	$\pm 20$ / $\pm 100$ / $\pm 500$
Résolution (1) ( $\mu\text{m/s}$ RMS)	$< 0,05$ / $< 0,1$ / $< 0,3$
Distance de travail	0,2 à 30m
Sécurité laser	He-Ne de classe II (sécurité oculaire garantie)
<b>Sortie analogique</b> du signal de vitesse	BNC, $50\ \Omega$ , $\pm 4\ \text{V}$ , CNA 24 bits
Dynamique	$> 90\ \text{dB}$
Précision d'étalonnage	$\pm 1\%$ (20Hz - 22kHz)
Domaine de fréquences	0,5Hz - 22kHz
<b>Sortie numérique</b> du signal de vitesse	24 bits, 48kS/s de 0- 22kHz
Filtres passe- bas numérique (FIR)	1kHz, 5kHz, 22kHz (-0,1dB), 120dB /dec (ordre 6)
Filtres passe- haut analogique	100Hz (-3dB), 60dB / dec (ordre 3)

### Spécifications du vibromètre

\* (1) La résolution est définie comme l'amplitude du signal (RMS) pour laquelle le rapport signal à bruit est de 0 dB pour une largeur spectrale de 10 Hz; l'amplitude étant mesurée sur de l'adhésif rétro-réfléchissant.

Le signal de sortie analogique est obtenu par une conversion numérique analogique sur 24 bits de résolution soit une numérisation sur  $17 \times 10^6$  niveaux. Dans la gamme de mesure  $\pm 500$  mm/s, le rapport  $0,3\ \mu\text{s}$  entre la plus grande vitesse mesurable et la résolution est  $(500\text{mm/s})(0,3\ \mu\text{m/s}) \approx 1,7 \times 10^6$ . La grande dynamique de mesure justifie la résolution de 24 bits pour la sortie numérique et la conversion numérique- analogique.

Considérons une cible qui oscille à la fréquence de 20 kHz avec une amplitude de vitesse de 20 mm/s, qui permet d'utiliser le calibre  $\pm 20$  mm/s. Le décalage Doppler maximum est  $\delta\nu_D = 2 \times 20 \times 10^{-3} / 633 \times 10^{-9} = 63$  kHz. Le déplacement maximal est  $\delta x = v / (2\pi f) \approx 160$  nm,

qui correspond à un déphasage maximum 
$$\Phi = \frac{4\pi}{\lambda} \delta x \approx \pi$$
.

Avec le décalage Doppler maximum, ce déphasage est obtenu en une durée  $\Delta t$  telle que  $2\pi\delta\nu_D\Delta t = \pi$ . D'où  $\Delta t = 1 / (2\delta\nu_D) \approx 8\ \mu\text{s}$ , correspondant à  $N_p = \nu_B\Delta t \approx 320$  oscillations du signal d'interférence à 40 MHz (fréquence de la porteuse à la fréquence de Bragg). En principe, il suffit d'une durée minimale de  $8\ \mu\text{s}$  pour réaliser une mesure de vitesse. Cela signifie que le signal sinusoïdal de vitesse à 20 kHz peut être échantillonné à 6 points par période.

Le spectre du signal d'interférence pour une vibration d'amplitude 20 mm/s à la fréquence de 20 kHz est montré par la figure 16.

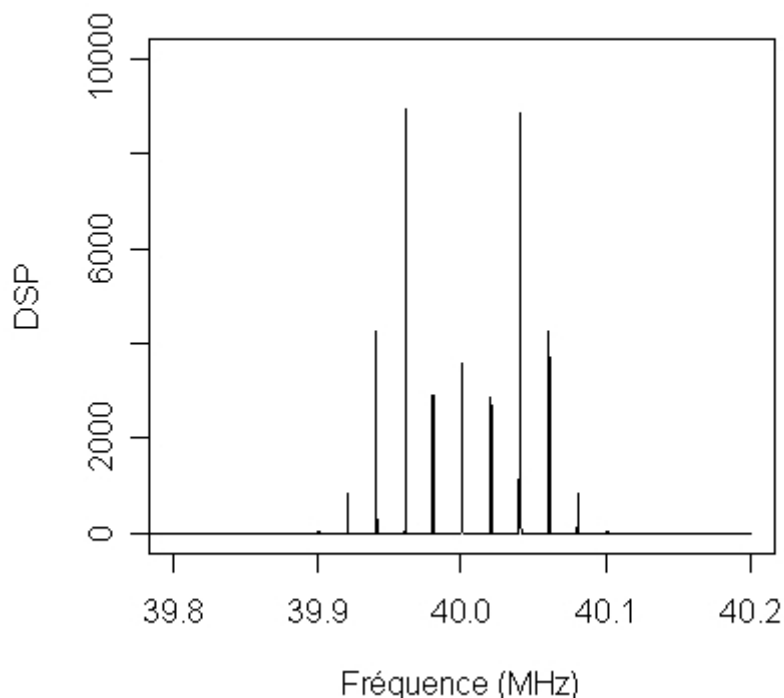


Figure 16 - Spectre du signal hétérodyne

Il s'étale sur la bande  $40 \text{ MHz} \pm 100 \text{ kHz}$  autour de la porteuse. Cela peut être obtenu par la règle de Carlson. Pour limiter le bruit dans la chaîne de mesure, il conviendra de filtrer dès l'entrée le signal d'interférence par un passe-bande centré sur la fréquence de  $40 \text{ MHz}$  et de largeur  $200 \text{ kHz}$ . Pour les calibres de vitesses plus grand, il faut élargir la bande passante.

D'après les spécifications, la « résolution » du calibre  $\pm 20 \text{ mm/s}$  correspond au bruit RMS maximum de  $50 \text{ nm/s}$  pour une bande passante de  $10 \text{ Hz}$ . Dans la bande passante de  $22 \text{ kHz}$ , la valeur RMS du bruit est :

$$v_{RMS} = 50 \text{ nm/s} \sqrt{\left(\frac{22 \times 10^3}{10}\right)} \approx 2,35 \mu\text{/s}$$

$$\frac{2v_{RMS}}{\lambda} \approx 7,5 \text{ Hz}$$

Le décalage Doppler correspondant à cette vitesse est :

L'incertitude relative sur la mesure de la fréquence de modulation doit être de  $7,5 \text{ Hz}/40 \text{ MHz} = 1,85 \times 10^{-7}$ , soit  $\approx 0,1 \text{ ppm}$  pour la précision d'horloge. Pour mesurer précisément une fréquence voisine de  $40 \text{ MHz}$  à  $7,5 \text{ Hz}$  près, il faut mesurer précisément la durée des 320 oscillations du signal à  $40 \text{ MHz}$ , soit une durée approximative de  $8 \mu\text{s}$ , avec une incertitude inférieure à  $1,5 \text{ ps}$  !

Soit une incertitude de  $1 \text{ ps}$  sur la détermination de début ou la fin des oscillations. La solution numérique est envisageable avec les systèmes d'acquisitions modernes présents dans certains oscilloscopes qui possèdent une très grande précision d'horloge, une fréquence d'échantillonnage qui peut atteindre  $500 \text{ MEch./s}$  avec une résolution verticale de 12 bits (quantification  $1/2^{12} = 2,5 \cdot 10^{-4}$ ). Le traitement numérique du signal pourrait permettre la détermination de la durée des  $N_p$  périodes avec une incertitude de l'ordre de  $1 \text{ ps}$ .

A titre de comparaison, calculons le déplacement équivalent au bruit d'un interféromètre homodyne qui aurait une bande passante de 20 kHz et une étendue de mesure de déplacement de  $\pm 50$  nm. Supposons que la puissance moyenne reçue par le photodétecteur est  $P_0 = 100 \mu\text{W}$  à la longueur d'onde de 633 nm, avec un rendement quantique  $\eta = 1$  et un contraste  $m = 0,5$ . On calcule :

$$\frac{\delta x}{\sqrt{\Delta f}} = \frac{1}{2\pi\pi} \times \sqrt{\frac{hc\lambda}{2nP_0}} = \frac{1}{2\pi \times 0,5} \times \sqrt{\frac{6,62 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \times 633 \times 10^{-9}}{2 \times 1 \times 100 \times 10^{-6}}} = 8 \times 10^{-1} m \sqrt{Hz}$$

Pour une bande passante de 20 kHz,  $\delta x = 1,12$  pm et l'amplitude de la vitesse équivalente au bruit à 20 kHz est  $\delta v = 2\pi f \delta x = 2\pi \times 20 \times 10^3 \times 1,12 \text{ pm} \approx 140 \text{ nm/s}$ . On peut conclure que les performances en terme de résolution sont les mêmes, si l'on tient compte de la dynamique de mesure en déplacement de l'interféromètre homodyne limité en régime linéaire à  $\pm 50$  nm, soit 3 fois moins que pour le vélocimètre hétérodyne avec  $\pm 160$  nm à 20 kHz.

# IV. Exercices

## 1. Questions

Considérons le vélocimètre de l'étude de cas.

### Question 1

[Solution n°1 p 26]

Calculer la bande passante minimale du filtre analogique passe bande du calibre  $\pm 500 \text{ mm/s}$  qui filtre le signal d'interférence.

### Question 2

[Solution n°2 p 26]

Les deux faisceaux laser d'un vélocimètre de surface sont focalisés sur une cible diffusante avec un objectif de distance focale  $f = 20 \text{ cm}$  et d'ouverture numérique  $NA = 0,1$ . Les faisceaux laser gaussiens ont des rayons gaussiens  $w = 1 \text{ mm}$  avant l'objectif. Combien de grains de speckle couvrent en moyenne le champ de l'objectif ?

## 2. Exercice

$$\vec{\Omega} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}$$

On cherche à mesurer le vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  d'un solide sur le principe du vélocimètre rotationnel montré au § 4.1. On envisage de construire un instrument comprenant trois faisceaux de sonde parallèles disposés en triangle et focalisés sur l'objet solide. Un interféromètre est associé à chaque faisceau, dont la direction est celle du vecteur unitaire  $\vec{e}$ . Chaque interféromètre mesure le décalage Doppler que subit l'onde lumineuse lors de la rétrodiffusion sur la cible. Avec les faisceaux 1 et 2, on définit le vecteur unitaire  $\vec{e}'_3 = \vec{e} \times \vec{e}_{12}$ , où  $\vec{e}_{12}$  est le vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{e}$  se trouvant dans le plan des faisceaux 1 et 2 et orienté de 1 vers 2. De la même manière, avec les faisceaux 2 et 3, on définit les vecteurs  $\vec{e}'_3$  et  $\vec{e}'_1 = \vec{e} \times \vec{e}_{23}$ .

Montrer que la paire d'interféromètres 1 et 2 permet d'obtenir un signal proportionnel à  $\vec{\Omega} \cdot \vec{e}'_3$ , que la paire d'interféromètres 2 et 3 permet d'obtenir un signal proportionnel à  $\vec{\Omega} \cdot \vec{e}'_1$ .

On pose  $\vec{e}'_i \begin{pmatrix} e_{ix} \\ e_{iy} \\ e_{iz} \end{pmatrix}$  et  $R_i = \vec{\Omega} \cdot \vec{e}'_i$ .

Ecrire la relation matricielle entre  $\vec{\Omega} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}$  et le vecteur  $\vec{R} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$ .

### Question

[Solution n°3 p 27]

Peut-on déterminer le vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  ?

# Solution des exercices

## >Solution n°1 (exercice p. 25)

Il faut calculer le décalage Doppler maximal qui est  $(\delta v_D)_{max} = 2 \times 0,500/633 \times 10^{-9} = 1,6 \text{ MHz}$ .

L'ordre de grandeur de la bande passante est donc  $40 \text{ MHz} \pm 2 \text{ MHz}$ . Pour une oscillation harmonique à  $20 \text{ kHz}$ , d'amplitude de vitesse  $0,5 \text{ m/s}$ , le spectre du signal de modulation de fréquence s'étale pratiquement sur la bande  $40 \text{ MHz} \pm 1,6 \text{ MHz}$  (figure 17).

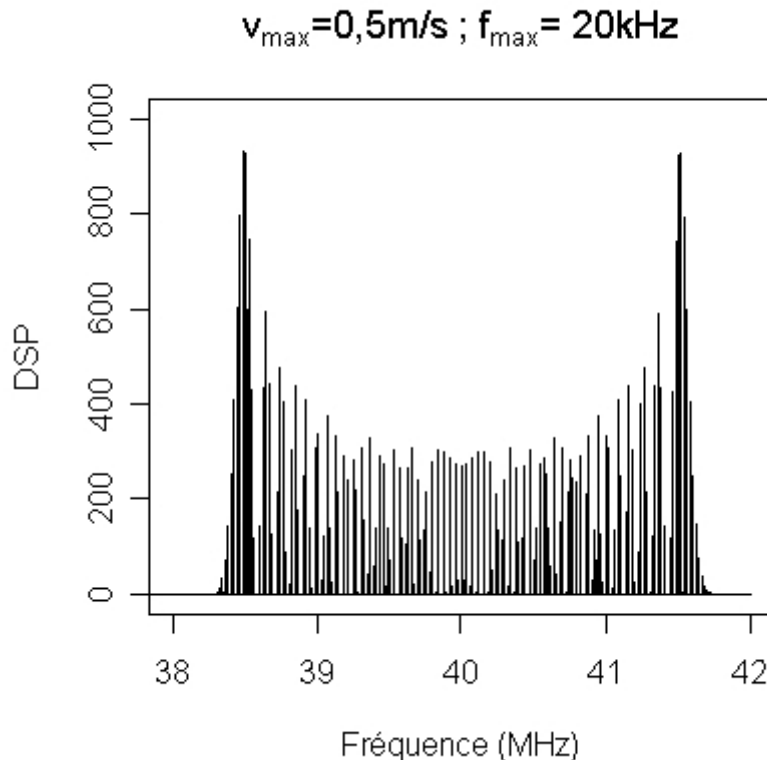


Figure 17 - Spectre du signal de modulation de fréquence d'un interféromètre hétérodyne sur une cible en oscillation sinusoïdale à la fréquence de  $20 \text{ kHz}$  et une amplitude de vitesse est de  $500 \text{ mm/s}$ . La porteuse a une fréquence de  $40 \text{ MHz}$ .

## >Solution n°2 (exercice p. 25)

La divergence d'un faisceau focalisé est  $\theta = w/f$  et couvre un angle solide  $\delta\omega = \pi\theta^2$ ; c'est l'angle solide moyen d'un grain de speckle dans la position de mise au point de la cible. L'angle solide sous tendu par l'objectif est  $\Omega = \pi NA^2$ . Le nombre de grains de speckle est :

$$N = \Omega/\delta\omega = NA^2/\theta^2 = \left(\frac{NAf}{w}\right)^2 \approx 400$$

**>Solution n°3** (exercice p. 25)

La relation matricielle est :

$$\begin{pmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$$

La matrice  $\begin{pmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{pmatrix}$  a un déterminant nul car les vecteurs  $\vec{e}'_1$ ,  $\vec{e}'_2 = \vec{e} \times \vec{e}_{23}$  et  $\vec{e}'_3$  sont coplanaires. Il n'est pas possible de déterminer simultanément les trois composantes du vecteur rotation avec ce dispositif.

Il est nécessaire de connaître a priori l'une des trois composantes pour déterminer les deux autres. Par exemple, on peut déterminer la composante  $\Omega_z$  avec un vélocimètre rotationnel à deux faisceaux convenablement orienté.

# Bibliographie

[**Génération et détection optiques d'ondes élastiques**] ROYER DANIEL, *Génération et détection optiques d'ondes élastiques*, Techniques de l'ingénieur, ---.

[**Laser Ultrasonics**] SCRUBY C.B., DRAIN L.E., *Laser Ultrasonics*, Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New York, 1990.

[**Optical Remote measurement of Ultrasound**] DEWHURST R.J., SHAN Q., *Optical Remote measurement of Ultrasound*, Meas. Sci. Technol., 1999--, n° 10.

# Webographie

[] <http://www.faro.com> (consultation 29 06 2007).

[] <http://www.polytec-pi.fr/> (consultation 29 06 2007).