

Transformation de Fourier fractionnaire

SÉBASTIEN COETMELLEC

Table des matières

I. Présentation	3
II. Cours	4
1. Transformation de Fourier Fractionnaire.....	4
1.1. Définition de la Transformation de Fourier Fractionnaire.....	4
1.2. Propriétés intrinsèques de l'opérateur fractionnaire.....	8
2. TF fractionnaire et les distributions de Wigner et Radon.....	9
2.1. La Fonction de Distribution de Wigner.....	10
2.2. Exemple de Fonction de Distribution de Wigner.....	12
2.3. La transformation de Radon-Wigner.....	14
2.4. Relation entre la FRFT et la distribution de Radon-Wigner.....	16
3. Equation différentielle.....	19
3.1. Illustration et résolution.....	19
4. Numérisation de la TF fractionnaire.....	20
4.1. Du continu au discret.....	21
4.2. Optimisation de l'échantillonnage.....	22
Glossaire	25
Bibliographie	26

I.Présentation

Module :

Interférences et Diffraction

Auteur(s) :

Sébastien COËTMELLEC - Université de Rouen - Coria

Résumé :

Ce chapitre montre qu'il est possible d'accéder à un domaine intermédiaire entre le domaine spatial et le domaine des fréquences spatiales au moyen d'un opérateur simple. Ses propriétés liées aux représentations temps-fréquences sont données. Enfin une numérisation est proposée pour calculer le résultat de cette opération.

Mots-clés :

Transformée de Fourier, Équation différentielle, Échantillonnage optimisé

Pré-requis :

Transformation de Fourier, décomposition sur une base de fonction

Objectif(s) pédagogique(s) :

Montrer qu'il possible de choisir un domaine de description autres que ceux que l'on connaisse (temporel, spatial ou fréquentielle).

Plan du cours :

- Introduction
- Transformation de Fourier Fractionnaire
- TF fractionnaire et les distributions de Wigner et Radon
- Équation différentielle
- Numérisation de la TF fractionnaire

Conception & production :

PRN - Le Mans Université

Licence :

Licence GNU¹

1 - <http://www.gnu.org/licenses/fdl.txt>

II. Cours

L'objectif principal de ce cours est de présenter de façon concise et suffisamment précise les éléments nécessaires à la compréhension de la transformation de Fourier fractionnaire. Dans ce titre, deux notions apparaissent : 1. la transformation de Fourier, 2. ordre fractionnaire. Il n'est plus nécessaire d'exposer l'énorme implication de ce premier sujet dans le domaine de la physique. En particulier celle qui traite de l'optique physique (dite de Fourier) et celle du traitement du signal. Le second thème "d'ordre fractionnaire" ne concerne en rien le calcul de fractions. Mais il reflète, pour le moment, une question fondamentale qui est de savoir s'il existe un domaine de description d'un signal entre le domaine spatial et le domaine spectral. La Transformation de Fourier d'ordre fractionnaire est une généralisation de la Transformation de Fourier. En écrivant la transformation de Fourier classique d'une fonction f sous la forme $F_{\pi/2}f$ on peut généraliser cette écriture pour n'importe quel ordre fractionnaire α . La Transformation de Fourier fractionnaire (*FRFT*) d'ordre α de f sera :

$$F_{\alpha} f \quad (1.1)$$

Pour $\alpha = 0$, on trouve l'opérateur identité et le résultat donnerait la fonction f . Pour $\alpha = \pi/2$, on trouve la transformation de Fourier classique. Rappelons que l'objectif principal est de définir la transformation de Fourier fractionnaire pour accéder à un domaine, dit fractionnaire, entre le domaine spatial et le domaine spectral. Il faut savoir qu'il existe également des opérateurs bilinéaires temps-fréquence. Ces opérateurs sont multiples et leur objectif principal est de donner une représentation du signal sur une cartographie de coordonnées spatiales-fréquences spatiales ou temporelles-fréquentielles. Les représentations qui vont nous intéresser sont celles de Wigner, d'une part et de Radon-Wigner d'autre part. Le passage d'un système de coordonnées à l'autre s'effectue par la Transformation de Fourier. La transformation de Fourier fractionnaire place le signal dans un domaine intermédiaire entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel. Elle possède donc des relations étroites avec les distributions temps-fréquence et en particulier la distribution de Wigner. Enfin, comme tout opérateur, il est primordial de proposer un moyen numérique pour calculer la transformée de Fourier fractionnaire d'une fonction. Nous allons donc voir dans ce chapitre :

1. La définition mathématique de la transformation de Fourier fractionnaire,
2. Les propriétés liées à cet opérateur,
3. Les représentations bilinéaires et la transformation de Fourier fractionnaire,
4. La numérisation de la transformation de Fourier fractionnaire.

1. Transformation de Fourier Fractionnaire

1.1. Définition de la Transformation de Fourier Fractionnaire

C'est dans le cadre de la résolution des équations différentielles en mécanique quantique que Namias a proposé une nouvelle transformation : la Transformation de Fourier Fractionnaire (*FRFT*) [[The Fractional order Fourier Transform and its application to Quantum]]. Les fondements de cette transformation débutent par la propriété suivante : les fonctions d'Hermite-Gauss normalisées, notées $\phi_n(x)$ où $n \in \mathbb{N}$ est l'ordre de la fonction, sont des fonctions propres de la *TF* associées aux valeurs propres $\exp(-i n \frac{\pi}{2})$ telles que :

$$F[\Phi_n(x)](u) = \exp(-i n \frac{\pi}{2}) \Phi_n(u) \quad (2.1)$$

avec $i^2 = -1$. F est l'opérateur Transformation de Fourier classique définie par :

$$F[f(x)](u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i 2 \pi u x) dx \quad (2.2)$$

et

$$\Phi_n(x) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{2^n n!}} \cdot h_n(x \sqrt{2 \pi}) \exp(-\pi x^2) \quad (2.3)$$

La fonction $h_n(x)$ représente le polynôme d'Hermite d'ordre n . Sa valeur est donnée par :

$$h_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) \quad (2.4)$$

Les fonctions d'Hermite-Gauss sont des fonctions réelles et oscillantes. L'ordre n indique le nombre de racines de la fonction $\phi_n(x)$ comme l'illustre la figure 1.

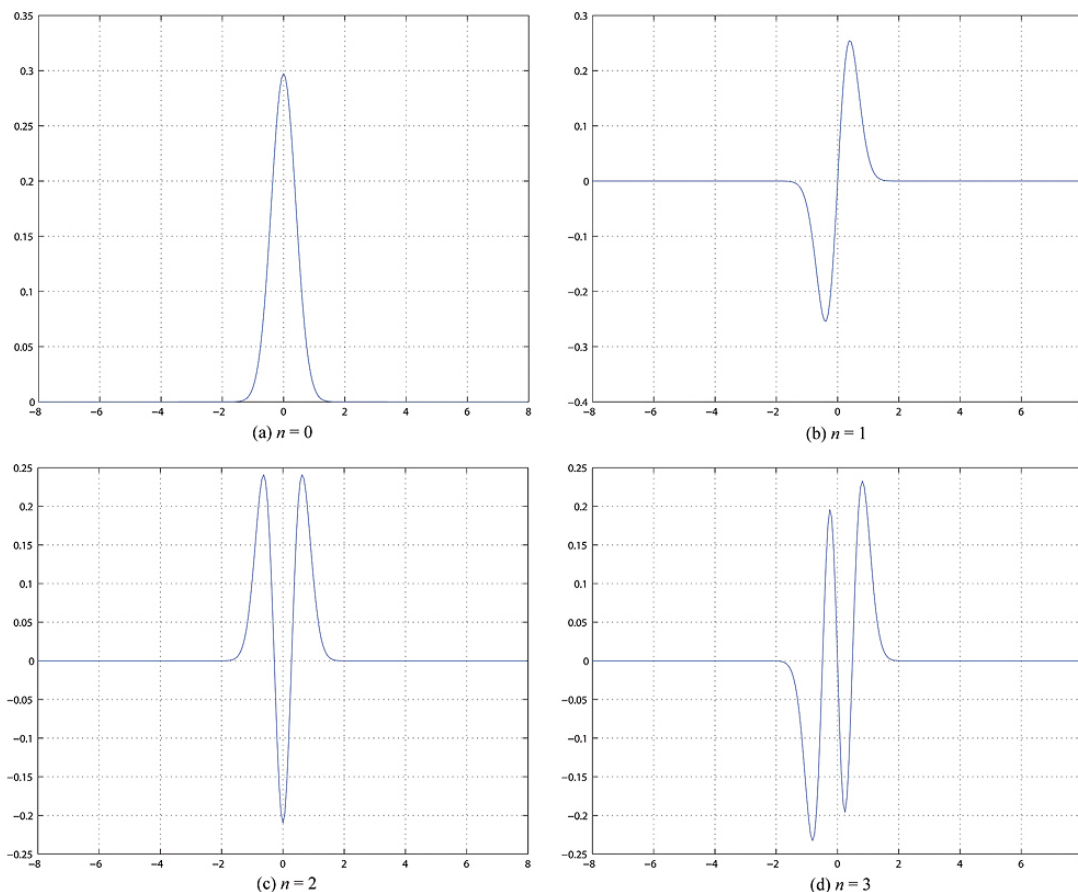


Figure 1 :

Figure 1 : Fonctions d'Hermite-Gauss d'ordre 0, 1, 2 et 3

Comme la phase des valeurs propres dans l'équation (2.1) est proportionnelle à $\frac{\pi}{2}$, Namias a nommé l'opérateur de Fourier $\mathbf{F}_{\pi/2}$. Il a ensuite généralisé cet opérateur à n'importe quel ordre fractionnaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathbf{F}_{\alpha}[\Phi_n(x)](u) = \text{Exp}[-in\alpha]\Phi_n(u) \quad (2.5)$$

Ainsi l'opérateur \mathbf{F}_{α} prend le nom de transformation de Fourier fractionnaire d'ordre α où α est l'ordre fractionnaire. Notons que $\mathbf{F}_{\pi/2}$ et \mathbf{F}_{α} ne sont pas les mêmes opérateurs. Rappelons que les fonctions d'Hermite-Gauss forment une base orthonormée [[Elements de mathématiques du signal]]. Toute fonction f de carré-intégrable peut être décomposée sur cette base de la manière suivante :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x) \quad (2.6)$$

où a_n sont les coefficients de décomposition tels que :

$$a_n = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x) f(x) dx \quad (2.7)$$

En tenant compte de l'équation (2.5), une première définition de la *FRFT* de $f(x)$ est donnée par :

$$F_\alpha[f(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp[-in\alpha] \exp[-i\frac{\pi}{2}] h_n(x) \quad (2.8)$$

Or le calcul théorique de la *FRFT* d'une fonction au moyen d'une série n'est pas simple. Une écriture intégrale a été proposée en utilisant la formule de Mehler [[The Fractional order Fourier Transform and its application to Quantum]]. L'équation (2.8) devient alors :

$$F_\alpha[f(x)](x_a) = C(\alpha) \exp(i\pi \cot \alpha x_a^2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(i\pi \cot \alpha x^2) \exp(-i2\pi \frac{x_a x}{\sin \alpha}) dx \quad (2.9)$$

avec

$$C(\alpha) = \frac{\exp(-i(\frac{1}{4}\pi \text{sign}(\sin \alpha) - \alpha/2))}{\sqrt{|\sin \alpha|}} \quad (2.10)$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, x_a est la variable dans le domaine d'arrivée appelé domaine fractionnaire. Le terme $C(\alpha)$ assure la conservation d'énergie entre le domaine de départ et le domaine fractionnaire. L'écriture de (2.9) peut être allégée ainsi :

$$F_\alpha[f(x)](x_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\alpha(x, x_a) f(x) dx \quad (2.11)$$

où $K_\alpha(x, x_a)$ est le noyau de la *FRFT*. Il est égal à :

$$K_\alpha(x, x_a) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(n) \exp(-in\alpha) \Phi_n(x_a) = C(\alpha) \exp(i\pi \cot \alpha (x^2 + x_a^2)) \exp(-i2\pi \frac{x_a x}{\sin \alpha})$$

si α n'est pas un multiple de π .

$$= \delta(x - x_a)$$

si α est multiple de 2π .

$$= \delta(x + x_a)$$

si $\alpha + \pi$ est multiple de 2π .

$$(2.12)$$

Le symbole $\delta(x)$ représente la distribution singulière de Dirac. La définition de la FRFT est valable pour toute fonction $f(x)$ de carré-intégrable ou non ($1, x, x^2, \dots$) pourvu que l'intégrale converge. Finalement notons que l'ordre fractionnaire α peut avoir une valeur complexe.

1.2. Propriétés intrinsèques de l'opérateur fractionnaire

Parmi les propriétés de la *FRFT* [The Fractional Fourier Transform], notons l'opérateur identité qui correspond à l'ordre fractionnaire nul : $\mathbf{F}_0[f(x)] = f(x)$. La parité d'un signal est obtenue pour $\alpha = \pi$. En $\mathbf{F}_\pi[f(x)] = f(-x)$. Le cas particulier de la transformation de Fourier classique est obtenu pour l'ordre fractionnaire égal à $\frac{\pi}{2}$:

$$\mathbf{F}_{\frac{\pi}{2}}[f(x)] = \mathbf{F}[f(x)] \quad (2.13)$$

La transformation de Fourier fractionnaire inverse d'un signal est obtenue par sa transformation directe en changeant le signe de α :

$$f_a(x_a) = \mathbf{F}_\alpha[f(x)](x_a) \Leftrightarrow f(x) = \mathbf{F}_{-\alpha}[f_a(x_a)](x) \quad (2.14)$$

La relation de Parseval est respectée entre le domaine de départ et le domaine fractionnaire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{F}_\alpha(f(x))](x_a) dx_a \quad (2.15)$$

La *FRFT* est un opérateur linéaire, c'est-à-dire :

$$\mathbf{F}_\alpha\left[\sum_n c_n f_n(x)\right](x_a) = \sum_n c_n \mathbf{F}_\alpha[f_n(x)](x_a) \quad (2.16)$$

Il est important de citer la non-linéarité par translation de l'opérateur. En effet, soit $f(x - \zeta)$ la version tradatée de $f(x)$ de la quantité ζ , sa transformée donne :

$$\mathbf{F}_\alpha[f(x - \zeta)](x_a) = \exp(i\pi\zeta^2 \sin \alpha \cos \alpha) \exp(-i2\pi\zeta \sin \alpha) [f(x)](x - \zeta \cos \alpha) \quad (2.17)$$

La non-linéarité se traduit par le coefficient $\cos \alpha$ sur ζ . Notez que cette non-linéarité disparaît dès que nous sommes dans le domaine de Fourier, c'est-à-dire pour $\alpha = \pi/2$. Cette remarque rejoint ce que l'on connaît de la transformée de Fourier : c'est un opérateur invariant par translation.

La composition de deux opérateurs d'ordres fractionnaires α et β est la somme des deux ordres fractionnaires telle que :

$$\mathbf{F}_\alpha \circ \mathbf{F}_\beta = \mathbf{F}_\beta \circ \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_{\alpha+\beta} \quad (2.18)$$

Enfin la *FRFT* d'une fonction multipliée par une exponentielle complexe :

$$\mathbf{F}_\alpha[\exp(i2\pi\zeta x) f(x)](x_a) = \exp(-i\pi\zeta^2 \sin \alpha \cos \alpha) \exp(i2\pi x \zeta \cos \alpha) \mathbf{F}_\alpha[f(x)](x_a - \zeta \sin \alpha) \quad (2.19)$$

A ces propriétés s'ajoutent l'associativité et la commutativité de l'opérateur par rapport à l'indice fractionnaire α . Enfin, la transformation de Fourier fractionnaire de la dérivée d'ordre n d'une fonction $f(x)$ est définie par :

$$\mathbf{F}_\alpha\left[\frac{d^n f}{dx^n}(x)\right](x_a) = (i2\pi x_a \sin \alpha + \cos \alpha \frac{d}{dx_a})^n f_a \quad (2.20)$$

avec $f_a = \mathbf{F}_\alpha[f(x)](x_a)$. Donnons deux exemples. Le premier pour $n = 1$:

$$\mathbf{F}_\alpha\left[\frac{df}{dx}(x)\right](x_a) = (i2\pi x_a \sin(\alpha) f_a + \cos(\alpha) \frac{df_a}{dx_a}) \quad (2.21)$$

le second pour $n = 2$:

$$\mathbf{F}_\alpha\left[\frac{d^2}{dx^2} f(x)\right](x_a) = [-4\pi x_a^2 \sin^2(\alpha) + i\pi \sin(2\alpha)] f_a + i2\pi \sin(2\alpha) x_a \frac{df_a}{dx_a} + \cos^2(\alpha) \frac{d^2 f_a}{dx_a^2} \quad (2.22)$$

Enfin, la dernière propriété intéressante à retenir dans le cas d'une résolution d'équation différentielle est celle de la transformation du produit d'une fonction $f(x)$ par x^n :

$$\mathbf{F}_\alpha[x^n f(x)](x_a) = (x_a \cos(\alpha) - \frac{\sin(\alpha)}{i2\pi} \frac{d}{dx_a})^n f_a \quad (2.23)$$

Pour $n = 1$, nous avons alors :

$$\mathbf{F}_\alpha[xf(x)](x_a) = x_a f_a \cos(\alpha) - \frac{\sin(\alpha)}{i2\pi} \frac{df_a}{dx_a} \quad (2.24)$$

et $n = 2$, nous avons :

$$\mathbf{F}_\alpha[x^2 f(x)](x_a) = \frac{\sin(2\alpha)}{4\pi} [i + 2\pi x_a^2 \cot(\alpha)] f_a + \frac{i}{2\pi} x_a \sin(2\alpha) \frac{df_a}{dx_a} - \frac{\sin^2(\alpha)}{4\pi^2} \frac{d^2 f_a}{dx_a^2} \quad (2.25)$$

2. TF fractionnaire et les distributions de Wigner et Radon

Les outils habituellement utilisés pour l'analyse des signaux, telle que la transformation de Fourier classique, ne permettent pas d'avoir une représentation de l'évolution spectrale d'un signal. C'est pourquoi les représentations temps-fréquences sont utilisées. Ces représentations ont l'avantage de décrire conjointement en temps et en fréquence un signal, ce qui est particulièrement utile pour décrire des signaux non stationnaires dont la fréquence varie au cours du temps, souvent appelés "signaux chirpés" où le terme "chirp" désigne la dérive de fréquences. Pour parvenir à une telle description, il est nécessaire d'utiliser une décomposition bilinéaire, c'est-à-dire une décomposition à la fois en temps et en fréquence [[Temps-Fréquence]]. Une première classe de solutions pour de telles représentations utilisent des décompositions atomiques (plus connues sous le terme de représentations temps-fréquences linéaires). De manière intuitive, il est possible d'analyser un signal au moyen de la transformation de Fourier à court terme (ou transformation de Fourier à fenêtre). La transformation en ondelettes et la transformation de Gabor sont également des solutions possibles. Cependant, ces méthodes ne fournissent pas une représentation de la distribution d'énergie sur les deux variables temps et fréquence [[Temps-Fréquence]]. Pour obtenir une représentation énergétique du signal à partir de cette première classe de solutions, on peut calculer le module au carré des transformées de Fourier à court terme ou le module au carré de la transformée en ondelettes, ce qui donne ce qu'on appelle le spectrogramme ou le scalogramme. Il existe une deuxième classe de solutions définie par les distributions d'énergie sous le principe fondamental de covariance par translation en temps et en fréquence, telles que les fonctions de distribution de Wigner. Cette distribution est un cas particulier d'une classe plus générale nommée classe de Cohen [[Temps-Fréquence]]. Contrairement aux représentations linéaires qui décomposent un signal en constituants élémentaires, l'objet d'une distribution conjointe d'énergie est de répartir cette dernière sur les deux variables de description. Autrement dit, dans la relation de Parseval :

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(v)|^2 dv \quad (2.26)$$

$|f(x)|^2$ et $|F(v)|^2$ peuvent être interprétées comme des densités d'énergie respectivement en temps et en fréquence. Il est donc naturel de chercher une densité d'énergie dépendant conjointement du temps et de la fréquence pour avoir l'énergie du signal :

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_f(x, v) dx dv \quad (2.27)$$

La densité d'énergie conjointe doit satisfaire à deux propriétés, à savoir :

$$|f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_f(x, v) dv$$

$$|F(v)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_f(x, v) dx \quad (2.28)$$

C'est sous ces conditions et avec le principe fondamental de covariance par translation en temps et en fréquence que la classe de Cohen a été élaborée.

2.1. La Fonction de Distribution de Wigner

Rappelons que les variables peuvent être temporelles ou spatiales. Nous les noterons t ou x . La forme la plus générale des distributions d'énergie temps-fréquences appartenant à la classe de Cohen est définie par l'expression mathématique générale :

$$C_{f,g}(x, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(x-s, \nu-\xi) W_{f,g}(s, \xi) ds d\xi \quad (2.29)$$

$\Pi(x, \nu)$ est une fonction appelée "noyau" que l'on peut adapter au signal choisi pour diminuer les termes d'interférence (que l'on abordera plus tard) de façon contrôlée. Ce noyau peut être vu comme une fenêtre de lissage agissant sur la représentation temps-fréquences et $W_{f,g}$ est la distribution de Wigner croisée de f et g :

$$W_{f,g}(x, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + \frac{x'}{2}\right) g^*\left(x - \frac{x'}{2}\right) \exp(-i2\pi \nu x') dx' \quad (2.30)$$

L'expression (2.29) n'est autre qu'un produit de convolution de $\Pi(x, \nu)$ par $W_f(x, \nu)$. Dans le cas particulier où $\Pi(x, \nu) = \delta(x, \nu)$, la distribution obtenue est la fonction de distribution de Wigner. Le symbole $*$ exprime le conjugué. Les axes en x et ν définissent un repère orthogonal. Les propriétés ne seront pas toutes exposées ici [[Theory and applications in signal processing]]. Nous rappellerons néanmoins celles qui sont importantes pour la lecture de ce cours : La première exprime la distribution de Wigner d'une transformée de Fourier classique : soit $F(\nu) = F_{\pi/2}[f(x)](\nu)$. La fonction de distribution de Wigner de $F(\nu)$ s'exprime en fonction de la distribution de Wigner de $f(x)$ de la manière suivante :

$$W_F(x, \nu) = W_f(-\nu, x) \quad (2.31)$$

Comme nous le verrons plus loin, ceci correspond à une rotation de 90 degrés dans l'espace temps- fréquences. L'effet d'un décalage en fréquence tel que $g(x) = f(x)\exp(i2\pi\chi x)$ sur la distribution de Wigner donne une translation dans l'espace temps-fréquences :

$$W_g(x, \nu) = W_f(x, \nu - \chi) \quad (2.32)$$

La propriété la plus intéressante, dans notre cas, est la multiplication par une fonction à dérive de fréquence linéaire. Si $g(x) = f(x)\exp(i2\pi\beta x)$ alors :

$$W_g(x, \nu) = W_f(x, \nu + \beta x) \quad (2.33)$$

Enfin, la dernière propriété est liée à distribution de Wigner d'un signal multicomposantes :

$$W_{af+bg}(x, \nu) = |a|^2 W_f(x, \nu) + |b|^2 W_g(x, \nu) + 2\Re(ab^* W_{f,g}(x, \nu)) \quad (2.34)$$

Les deux premiers termes définissent bien la fonction de distribution de Wigner des fonctions f et g . Le troisième terme met en évidence la propriété de non linéarité de la distribution de

Wigner. Il porte également le nom de terme d'interférences externes [[Theory and applications in signal processing]].

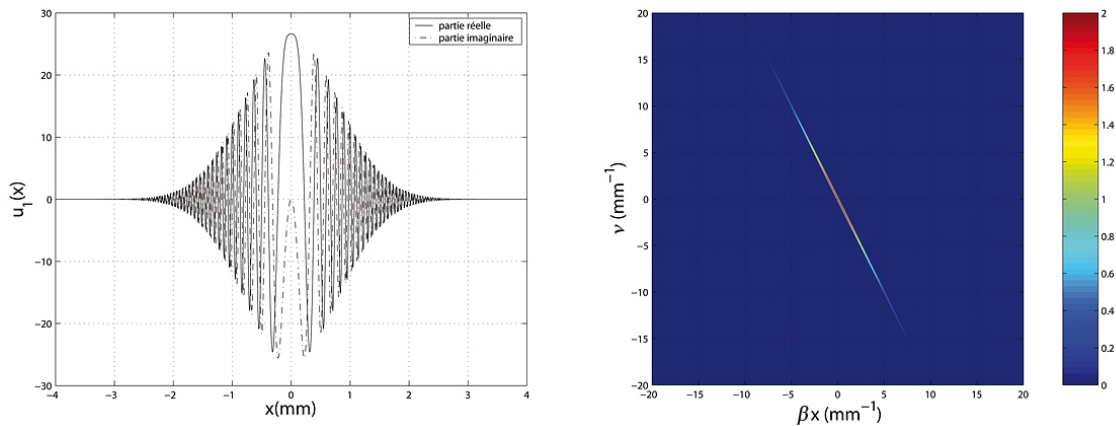


Figure 2 :

Figure 2 : Représentation de $u_1(x)$ et de sa fonction de distribution de Wigner associée. $\sigma = 2 \text{ mm}$, $\beta = 5 \text{ mm}^{-2}$

2.2. Exemple de Fonction de Distribution de Wigner

Présentons le cas d'une fonction à dérive de fréquences $u_1(x)$:

$$u_1(x) = \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\pi \frac{x^2}{\sigma^2}\right) \exp(-i 2 \pi \beta x^2) \quad (2.35)$$

La figure 2 donne une illustration de la fonction $u_1(x)$ ainsi que sa fonction de distribution de Wigner numérique. On constate bien que l'énergie suit la loi de variation de la fréquence ν en fonction de la variable spatiale x . La fréquence instantanée, notée $\nu(x)$, est donnée par l'expression [[Theory and applications in signal processing]] :

$$\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \quad (2.36)$$

où $\phi(x)$ est l'argument de la fonction $u_1(x)$. Les équations (2.35) et (2.36) nous donnent :

$$\nu(x) = -2 \beta x \quad (2.37)$$

On peut ainsi définir un angle ζ lié à la loi de variation de la fréquence spatiale instantanée en fonction de la variable βx , à savoir :

$$\tan \zeta = \frac{\nu(x)}{\beta x} = -2 \quad (2.38)$$

Soit $\zeta = -63,43$. La pente de la distribution de Wigner fait donc un angle de $-63,43$ par rapport à l'axe des abscisses. Dans ce premier exemple, où une seule fonction est traitée, aucun phénomène d'interférences n'est présent (troisième terme de l'équation (2.34)). Pour illustrer la non linéarité, ajoutons une composante, notée $u_2(x)$, pour avoir un signal multicomposantes :

$$u_2(x) = \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\pi \frac{x^2}{\sigma^2}\right) \exp(-i\pi(2\beta x^2 + \gamma x)) \quad (2.39)$$

L'équation (2.34) nous permet d'écrire que :

$$W_{u_1+u_2}(x, \nu) = W_{u_1}(x, \nu + 2\beta x) + W_{u_2}(x, \nu + \frac{\gamma}{2} + 2\beta x) + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N + 2\Re[W_{u_k, u_l}] \quad (2.40)$$

Sur la figure 3, nous observons bien deux distributions distinctes liées à $u_1(x)$ et $u_2(x)$ séparées en ν de 5mm^{-1} . Entre ces deux distributions, nous avons des interférences externes liées à la non linéarité de l'opérateur de Wigner. Elles se caractérisent par des oscillations positives et négatives. Autrement dit, si un signal est composé de N signaux élémentaires, alors sa distribution de Wigner sera composée de N distribution de Wigner et $\binom{N}{2}$ termes d'interférences externes. D'autres interférences peuvent apparaître dans le cas de signaux unicomposantes. Prenons l'exemple de la fonction :

$$u_3(x) = \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\pi \frac{x^2}{\sigma^2}\right) \exp(i2\pi \epsilon x^3) \quad (2.41)$$

dont la distribution de Wigner est illustrée figure 4. Cette distribution fait apparaître des oscillations qui sont caractéristiques du phénomène d'interférences internes. Ces interférences interviennent dès que la loi de variation de la fréquence en fonction de la variable spatiale introduit un rayon de courbure (ici $\nu(x) \approx \epsilon x^2$). Les équations (2.28) peuvent être utilisées pour obtenir le profil de l'énergie suivant l'une des deux variables x ou ν .

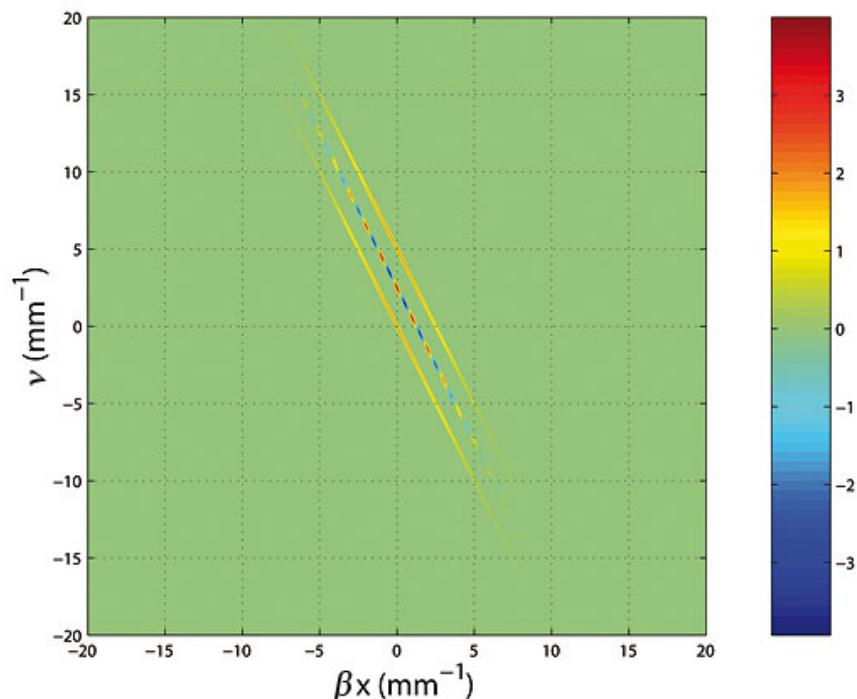


Figure 3 :

Figure 3 : Représentation de la fonction de distribution de Wigner du signal multicomposantes $u_1(x) + u_2(x)$ avec $\sigma = 2 \text{ mm}$, $\beta = 5 \text{ mm}^{-2}$ et $\gamma = -10 \text{ mm}^{-1}$

Cependant, il serait souhaitable de pouvoir déterminer le profil énergétique du signal dans un domaine intermédiaire entre le domaine spatial et le domaine des fréquences spatiales. Dans cet objectif, la transformation de Radon est l'outil adapté.

2.3. La transformation de Radon-Wigner

Cette transformation à l'origine était destinée au diagnostic médical par topographie numérique en utilisant les rayons X. Elle permettait d'obtenir des informations sur des sections planes du corps humain [[Principles of Optics]]. La transformation de Radon s'obtient par projection de la fonction de distribution de Wigner $W_f(x, \nu)$. Sa projetée suivant un axe x_μ formant un angle μ avec l'axe des x (voir figure 5) est définie par :

$$\mathcal{R}_\mu[f](x_\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(x_\mu \cos \mu - \nu_\mu \sin \mu, x_\mu \sin \mu + \nu_\mu \cos \mu) d\nu_\mu \quad (2.42)$$

Reprenons les exemples donnés dans le paragraphes (2.3.2) ($u_1(x)$ et $u_2(x)$) et appliquons la transformation de Radon sur la distribution de Wigner en sélectionnant uniquement la gamme de 10 à 45 degrés.

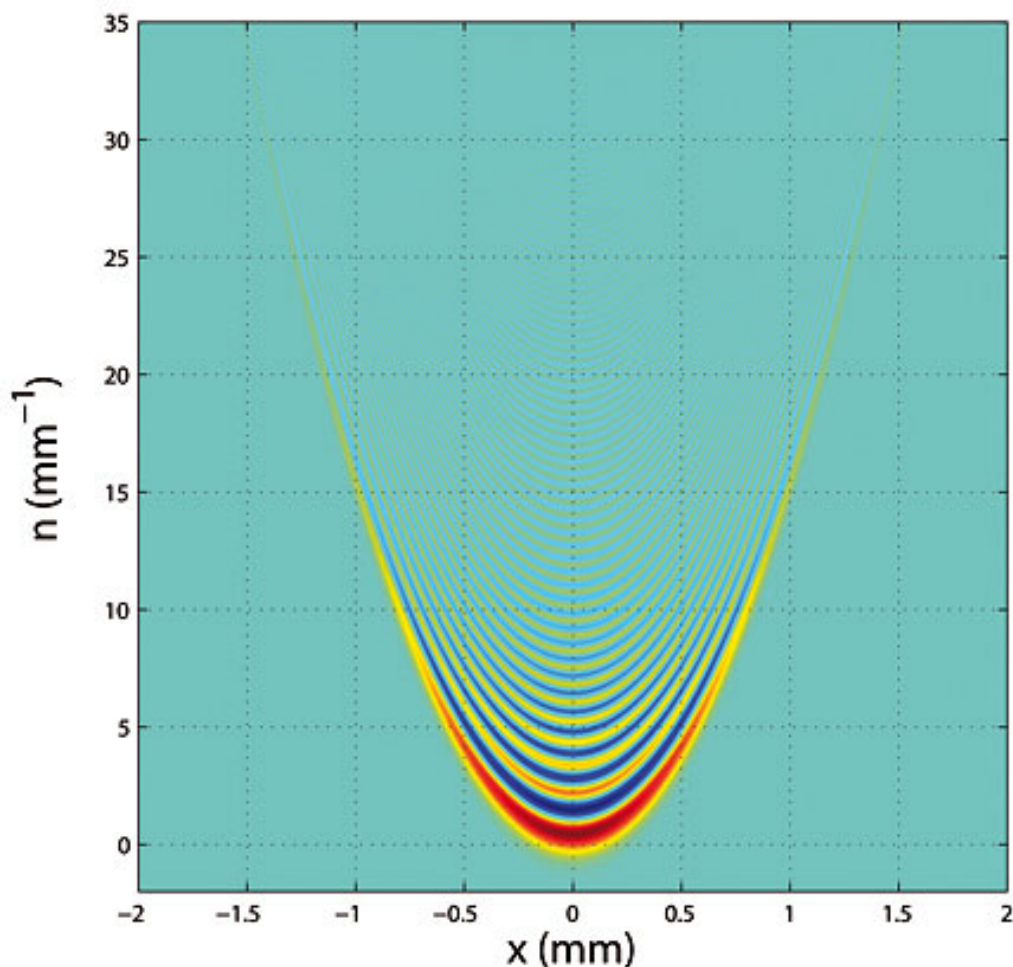


Figure 4 :

Figure 4 : Représentation de la fonction de distribution de Wigner du signal unicomposante $u_3(x)$ avec $\sigma = 2 \text{ mm}$ et $\epsilon = 5 \text{ mm} - 3$

Nous obtenons comme le montre la figure 6 deux maxima d'énergie liés aux deux dérivées de fréquences linéaires $u_1(x)$ et $u_2(x)$ pour un angle qui correspond bien à l'angle complémentaire de ζ défini par l'équation (2.36) :

$$\mu = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (2.43)$$

La valeur de μ obtenue correspond à l'angle optimal de la transformation de Radon-Wigner pour obtenir un maximum d'énergie par projection : $|\mu| = 26,56$. Notons toutefois que l'ensemble est peu efficace lorsque l'on souhaite un gain en temps de calcul. D'ailleurs pour obtenir la cartographie de la figure 6, trois minutes de calcul sont nécessaires sur un P.C. 1 GHz. De plus, si le signal à analyser est un signal bidimensionnel, la représentation de la distribution de Wigner est difficile puisque nous aurions dans ce cas à traiter une fonction à quatre dimensions. Rappelons aussi qu'un signal multicomposantes génère $\binom{N}{2}$ termes d'interférence qui ne nous permettraient plus une compréhension aisée du signal. La transformation de Fourier fractionnaire permet de résoudre tous ces inconvénients et elle est un outil d'analyse puissant pour analyser les signaux à dérive de fréquence linéaire.

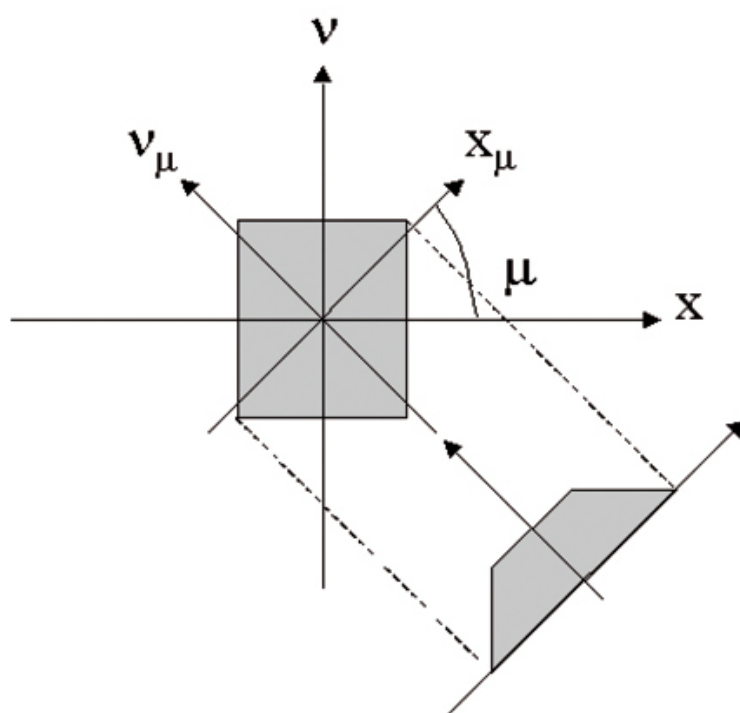


Figure 5 :

Figure 5 : Sens de rotation des axes dans la transformation de Radon

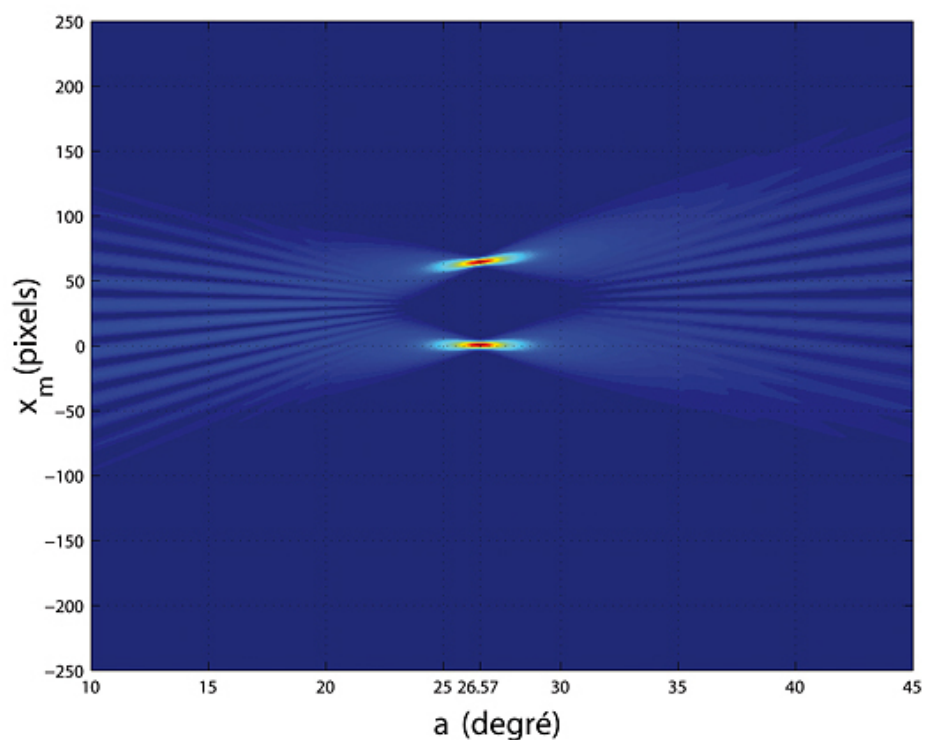


Figure 6 :

Figure 6 : Représentation de la densité d'énergie par transformation de Radon de la distribution de Wigner du signal $u_1(x) + u_2(x)$ pour des angles variant de 10 à 45 degrés

2.4. Relation entre la FRFT et la distribution de Radon-Wigner

Lohmann *et al.* ont proposé une nouvelle définition à la transformation de Radon (ou théorème de projection) sur la base de l'interprétation de la FRFT par la distribution de Wigner [[Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform]] :

- la distribution de Wigner de la transformation de Fourier fractionnaire d'une fonction $f(x)$ est la distribution de Wigner de $f(x)$ par rotation des axes dans le sens anti-trigonométrique,
- le module au carré de la transformation de Fourier d'ordre fractionnaire α d'une fonction $f(x)$ est la transformation de Radon-Wigner pour l'angle μ .

Cela se traduit par les relations suivantes :

$$W_{f_a}(x, v) = W_f(x \cos \alpha - v \sin \alpha, x \sin \alpha + v \cos \alpha) \quad (2.44)$$

ou bien

$$W_f(x, v) = W_{f_a}(x \cos \alpha + v \sin \alpha - x \sin \alpha + v \cos \alpha) \quad (2.45)$$

et

$$\mathcal{R} \mathcal{W} \mu[f](x_a) = |\mathcal{F}_\alpha[f(x)](x_a)|^2 \quad (2.46)$$

Avec $f_a = \mathcal{F}_\alpha[f]$. Pour illustrer et éclaircir nos propos, nous allons traiter une fonction élémentaire, notée $\text{rect}\left(\frac{x}{d}\right)$, définie par :

$$f(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{d}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < d/2 \\ 1/2 & \text{si } |x| = d/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.47)$$

L'étude de cette fonction présente un intérêt puisque qu'elle ne fait pas apparaître de dérives de fréquence linéaires initiales. Cette illustration fait appel au calcul numérique de la transformation de Fourier fractionnaire dont la réalisation est traitée dans le paragraphe

suivant. La fonction $\text{rect}\left(\frac{x}{d}\right)$ et sa fonction de distribution Wigner associée sont illustrées figure 7. Nous pouvons remarquer les oscillations dues au terme d'interférences internes expliquées au paragraphe (*Exemple de Fonction de Distribution de Wigner*). Appliquons une transformation de Fourier fractionnaire d'ordre $\alpha = \pi/4$ sur la fonction $\text{rect}(x/d)$ et calculons sa distribution de Wigner. Les résultats sont illustrés figure 8. Dans cet exemple, la rotation de la distribution de Wigner de $f(x)$ dépend directement de la valeur prise par l'ordre fractionnaire α . Il est donc possible de déterminer la loi de variation de la fréquence spatiale instantanée à partir de la relation (2.34).

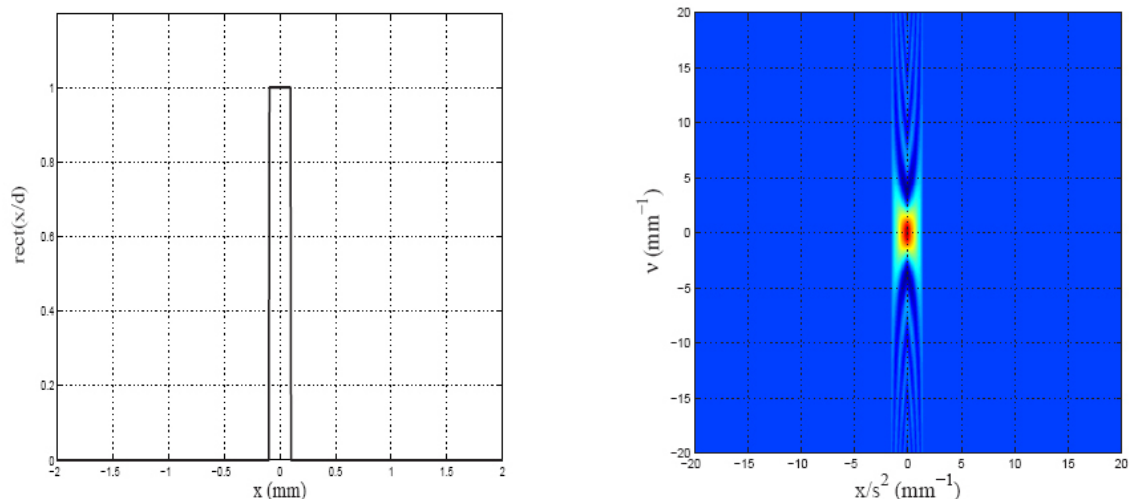


Figure 7 :

Figure 7 : Fonction rectangulaire d'ouverture $d = 0,2 \text{ mm}$ ainsi que sa fonction de distribution de Wigner

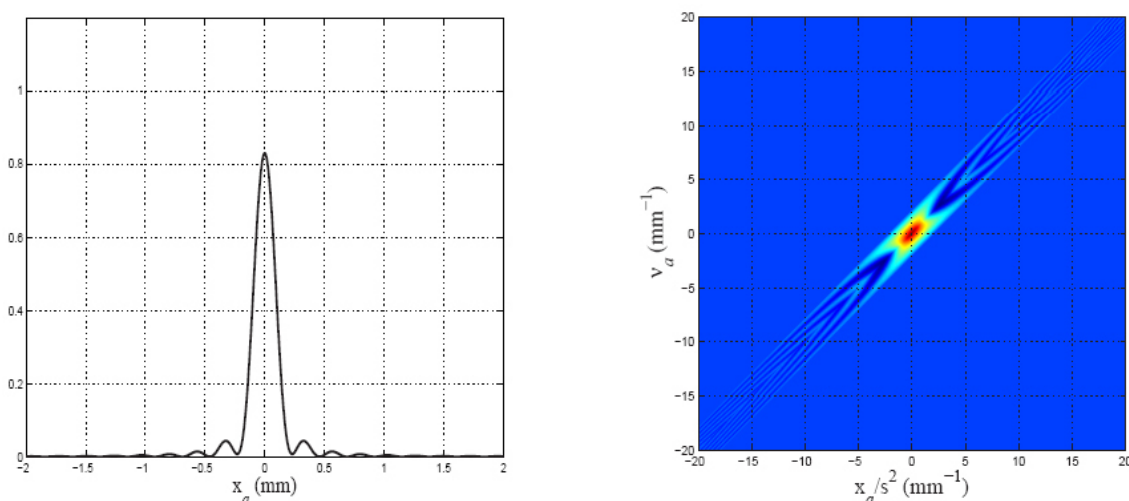


Figure 8 :

Figure 8 : Module au carré de la transformée de Fourier fractionnaire d'ordre $\alpha = \pi/4$ avec $s^2 = 63,28 \times 10^{-3} \text{ mm}^2$ de la fonction rectangulaire d'ouverture $d = 0,2 \text{ mm}$ ainsi que sa fonction de distribution de Wigner

Celle-ci vaut :

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\pi x^2}{\tan(\alpha)} \right) = x \cot(\alpha) \quad (2.48)$$

L'angle de rotation correspond bien à l'angle $\alpha = \pi/4$ de la FRFT comme l'illustre le graphe de la distribution de Wigner figure 8. x_a est la variable associée au domaine fractionnaire. Enfin, nous vérifions bien que pour l'indice fractionnaire $a = 1$, la distribution de Wigner a subi une rotation de $\pi/2$ (figure 9). Les courbes des modules au carré des FRFT sont exactement la projection des distributions de Wigner associées suivant un axe parallèle aux abscisses x et x_a respectivement.

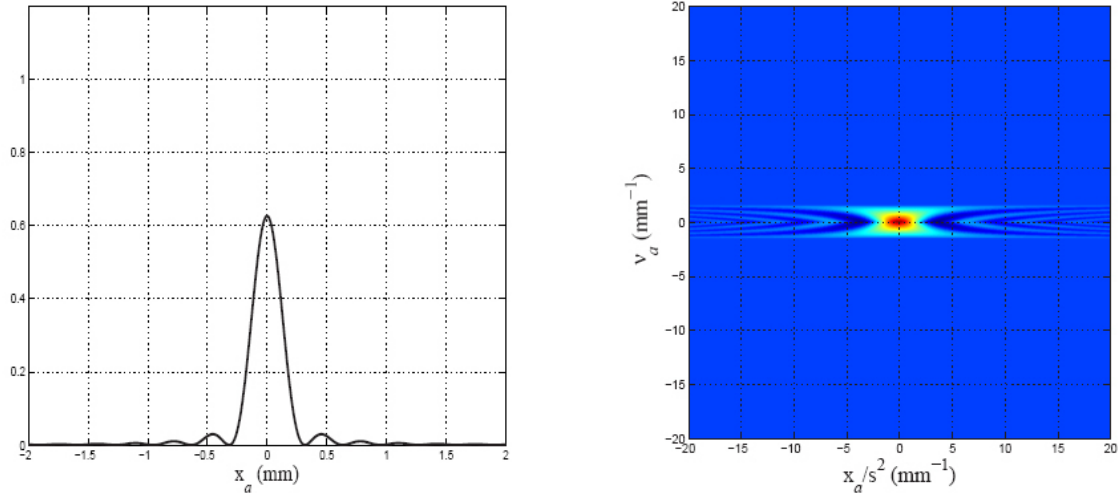


Figure 9 :

Figure 9 : Module au carré de la transformée de Fourier fractionnaire d'ordre $\alpha = 1$ de la fonction rectangulaire d'ouverture $d = 0,2 \text{ mm}$ ainsi que sa fonction de distribution de Wigner

3. Equation différentielle

3.1. Illustration et résolution

Dans cette section, nous allons illustrer l'utilisation de la *FRFT* pour résoudre une équation différentielle ordinaire d'ordre deux donnée par [[On Namias's Fractional Fourier Transforms]] :

$$f''(x) + b^2 x^2 f(x) = 0 \quad (2.44)$$

avec $b > 0$. Pour simplifier les écritures, nous poserons $f_a = \mathbf{F}_\alpha f$. On reprend l'équation (2.44) et on calcule sa *FRFT* telle que :

$$\mathbf{F}_\alpha [f''(x) + b^2 x^2 f(x)] = \mathbf{F}_\alpha [f''(x)] + b^2 \mathbf{F}_\alpha [x^2 f(x)] = 0 \quad (2.45)$$

Compte tenu des relations (2.22) et (2.25), nous obtenons :

$$[-4\pi x_a^2 \sin^2 \alpha + i\pi \sin(2\alpha)] f_a + i2\pi \sin(2\alpha) x_a \frac{df_a}{dx_a} + \cos^2 \alpha \frac{d^2 f_a}{dx_a^2} + \frac{b^2 \sin 2\alpha}{4\pi} [i + 2\pi x_a^2 \cot \alpha] f_a + \frac{ib^2}{2\pi} x_a \sin(2\alpha) \frac{df_a}{dx_a} - \frac{b^2 \sin^2 \alpha}{4\pi^2} \frac{d^2 f_a}{dx_a^2} = 0 \quad (2.46)$$

soit

$$[\cos^2 \alpha - \frac{b^2 \sin^2 \alpha}{4\pi^2}] \frac{d^2 f_a}{dx_a^2} + i2\pi \sin(2\alpha) x_a [1 + \frac{b^2}{4\pi^2}] \frac{df_a}{dx_a} + [x^2 (b^2 \cos^2 \alpha - 4\pi^2 \sin^2 \alpha) + i\pi \sin 2\alpha (1 + \frac{b^2}{4\pi^2})] f_a = 0 \quad (2.47)$$

Cette nouvelle équation différentielle est établie dans un domaine fractionnaire α quelconque. Nous pouvons choisir le domaine le plus intéressant pour résoudre notre équation différentielle. Dans ce cas, il est souhaitable de réduire l'ordre de l'équation différentielle en supprimant les dérivées d'ordre deux. Il faut donc que :

$$\cos^2 \alpha - \frac{b^2 \sin^2 \alpha}{4 \pi^2} = 0 \quad (2.48)$$

autrement écrit :

$$\tan \alpha = \frac{2 \pi}{b} \quad (2.49)$$

Donc, pour résoudre l'équation différentielle, nous nous plaçons dans le domaine fractionnaire α tel que :

$$\alpha = \arctan \left[\frac{2 \pi}{b} \right] \quad (2.50)$$

Dans ce cas, l'équation différentielle se simplifie pour devenir une équation différentielle d'ordre un telle que :

$$i 2 b x_a \frac{d f_a}{d x_a} + [x_a^2 (b^2 - 4 \pi^2) + i b] f_a = 0 \quad (2.51)$$

La résolution de cette dernière équation différentielle donne la solution suivante :

$$f_a(x_a) = \frac{K}{\sqrt{|x_a|}} \exp \left[i \frac{(b^2 - 4 \pi^2)}{4 b} x_a^2 \right] \quad (2.52)$$

Cette solution est la "solution spectrale" de l'équation différentielle dans le domaine fractionnaire défini par l'ordre fractionnaire $\alpha = \arctan \left[\frac{2 \pi}{b} \right]$. Pour obtenir la solution finale, il faut réaliser une transformation de Fourier fractionnaire inverse.

$$f(x) = f_{-\alpha} [f_a(x_a)](x) = C(-\alpha) e^{-i \frac{\pi x^2}{\tan \alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x_a) e^{-i \frac{\pi x_a^2}{\tan \alpha}} e^{i \frac{2 \pi x_a x}{\sin \alpha}} dx \quad (2.53)$$

En remarquant que la fonction donnée par (2.52) est une fonction paire, en posant $\omega = |x_a|^{1/2}$ et en considérant la relation de Gradshteyn telle que

$$\int_0^{+\infty} \cos[\beta \omega^2] \exp[i \gamma \omega^4] d\omega = \frac{\pi}{4} \left(\frac{|\beta|^{1/2}}{2} \right) \exp\left[\frac{i\pi}{8} - \frac{i\beta^2}{8\gamma}\right] J_{-1/4}\left[\frac{\beta^2}{8\gamma}\right]$$

(2.54)

où $J_{-1/4}$ est une fonction de Bessel d'ordre $-1/4$. La solution de l'équation différentielle vaut finalement :

$$f(x) = \frac{K \pi \sqrt{2b}}{2} C(-\alpha) \exp\left[i \frac{5\pi}{8}\right] \cdot |x|^{1/2} \cdot J_{-1/4}\left[\frac{bx^2}{2}\right]$$

(2.55)

En conclusion, nous remarquons à la suite de cet exemple de résolution que la transformée de Fourier n'est d'aucune aide ici. Nous pouvons remarquer également l'avantage d'introduire un coefficient arbitraire α pour réduire l'ordre de dérivation de l'équation différentielle. Cette réduction rend alors possible la résolution.

4. Numérisation de la TF fractionnaire

L'implémentation numérique de la Transformation de Fourier par la Transformation de Fourier Discrète (*TFD*) est un véritable succès. En ce qui concerne la *FRFT*, actuellement il n'existe pas d'algorithme tel que la *FFT* combinant les avantages de la vitesse de calcul, du respect des propriétés et de la souplesse d'utilisation. C'est une des raisons pour laquelle la transformation de Fourier fractionnaire n'est pas encore largement utilisée en analyse spectrale. Néanmoins, deux grandes familles d'algorithmes existent.

La première famille que l'on qualifiera d'algorithmes rapides fait usage de la *FFT* en se basant sur la définition de la *FRFT* donnée par l'équation (2.9). La seconde famille, quant à elle, fait usage d'algorithmes matriciels en se basant sur la définition donnée par la relation (2.8)

4.1. Du continu au discret

Le calcul numérique de la transformation de Fourier conventionnelle est basé sur sa représentation discrète. La transformation de Fourier discrète (*TFD*) est un échantillonnage approprié et une version numérisée de la transformation de Fourier continue (*TFC*). La *TFD* et la *TFC* d'une fonction $f(x)$ sont équivalentes si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $f(x)$ est définie sur un support borné égal à la période du signal,
- la fréquence d'échantillonnage est supérieure de deux fois la fréquence maximale de $f(x)$,
- l'intervalle d'échantillonnage Δx est un multiple entier de la période de $f(x)$.

Pour des fonctions non périodiques, la *TFD* peut être considérée comme équivalente à la *TFC* si la fonction à une étendue limitée et si la coupure aux plus hautes fréquences à des effets négligeables sur le spectre de puissance. Si l'on désire implanter la transformation de Fourier au moyen de la *TFD*, il est nécessaire de multiplier la fonction discrète dans le domaine spatial par la période d'échantillonnage δx :

$$F\left(\frac{k}{N \delta x}\right) = \delta x \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f(n \delta x) \exp(-i 2 \pi \frac{nk}{N}) \quad (2.56)$$

Rappelons que la forme continue de la *FRFT* est la suivante :

$$f_a(x_a) = C(\alpha) \exp(i \frac{\pi x_a^2}{\tan \alpha}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(i \frac{\pi x^2}{\tan \alpha}) \exp(-i 2 \pi \frac{x_a x}{\sin \alpha}) dx \quad (2.57)$$

Où $f_a(x_a) = \mathbf{F}_\alpha[f(x)](x_a)$.

En procédant à un changement de variables sur l'équation (2.57) tel que :

$$\zeta = x_a / (\sin \alpha) \quad (2.58)$$

l'expression (2.57) s'écrit alors :

$$\hat{f}_a(\zeta) = C(\alpha) \exp(i \pi \frac{1}{2} \sin(2 \alpha) \zeta^2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(i \frac{\pi x^2}{\tan \alpha}) \exp(-i 2 \pi \zeta x) dx \quad (2.59)$$

Avec $\hat{f}_a(\zeta) = f(\zeta \sin \alpha)$. Ce changement d'échelle sera, comme nous le verrons plus tard, automatiquement pris en compte dans le cadre d'un échantillonnage optimisé. En accord avec l'équation (2.56), la forme discrète de la relation (2.59) est par conséquent :

$$\hat{f}_a(k \delta \zeta) = \delta x C(\alpha) \exp(i \pi \frac{1}{2} \sin(2 \alpha) k^2 \delta \zeta^2) \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f(n \delta x) \exp(i \frac{\pi n^2 \delta x^2}{\tan \alpha}) \exp(-i 2 \pi nk \delta \zeta \delta x) \quad (2.60)$$

Où $\delta \zeta$ est la période d'échantillonnage dans le domaine fractionnaire x_a . Si Δx est le support compact du signal étudié, la période d'échantillonnage δx vaut $\Delta x / N$ et la période d'échantillonnage dans le domaine fractionnaire vaut $1 / \Delta x$. La relation (2.60) prend donc la forme finale :

$$\hat{f}_a(k) = \frac{\Delta x}{N} C(\alpha) \exp(i \pi \frac{\sin(2 \alpha)}{2 \Delta x^2} k^2) \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f(n \frac{\Delta x}{N}) \exp(i \frac{\pi \Delta x^2}{\tan \alpha} \frac{n^2}{N^2}) \exp(-i 2 \pi nk) \quad (2.61)$$

Cette écriture présente l'avantage d'être facile à implanter numériquement mais présente également un gain en vitesse de calcul puisqu'une seule *FFT* et deux multiplications par les fonctions chirp sont nécessaires. Il reste à définir un échantillonnage optimisé.

4.2. Optimisation de l'échantillonnage

Pour optimiser l'échantillonnage, il est nécessaire de partir de la *FRFT* continue pour traiter les phases quadratiques qui apparaissent dans l'intégrale. Un échantillonnage optimisé devra prendre en compte les phases quadratiques qui présentent de fortes oscillations lorsque l'on s'éloigne de l'origine. C'est d'ailleurs à ce titre que l'on doit imposer un domaine d'intégration borné.

Commençons par examiner le terme de phase quadratique $\varphi(x) = \pi x^2 \cot \alpha$ sous l'intégrale. La fréquence instantanée, notée f_i , rappelons-le, est alors définie par :

$$f_i(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = x \cot \alpha \quad (2.62)$$

La période instantanée de la phase quadratique vaut $1/f_i(x)$ ou $\tan(\alpha)/x$. La plus petite pseudo-période du signal, notée T_{min} , est obtenue en considérant la moitié du support de la fonction, c'est-à-dire $x = \Delta x/2$. Autrement dit :

$$T_{min} = \frac{1}{\text{Max}(|f_i(x)|)} = \frac{1}{(|f_i(\Delta x/2)|)} = \left| \frac{2 \tan \alpha}{\Delta x} \right| \quad (2.63)$$

La fréquence d'échantillonnage, f_e , doit respecter la condition de Shannon à savoir qu'elle doit être égale ou supérieure à deux fois la fréquence instantanée maximale du signal : $f_e \geq 2f_{imax}$. Donc :

$$\delta x \leq \left| \frac{\tan \alpha}{\Delta x} \right| \quad (2.64)$$

En ce qui concerne le terme de phase quadratique en dehors de l'intégrale de la *FRFT*, le procédé est rigoureusement le même. Par conséquent la période d'échantillonnage dans le domaine fractionnaire doit aussi respecter :

$$\delta x_a \leq \left| \frac{\tan \alpha}{\Delta x_a} \right| \quad (2.65)$$

Il reste maintenant à définir la relation qui lie les supports Δx et Δx_a . Celle-ci est obtenue grâce à la relation d'incertitude que l'on écrit compte tenu des variables d'intégration considérées dans l'équation (2.59) :

$$\Delta x \Delta \xi = N \quad (2.66)$$

où N définit le nombre de points d'échantillonnage. En utilisant la relation (2.57), la relation d'incertitude (2.66) devient :

$$\Delta x \Delta x_a = N \sin \alpha \quad (2.67)$$

L'équation (2.67 (cf. p25)) montre que lorsqu'un signal subit une dérive de fréquences, alors la relation d'incertitude est brisée : le produit des supports n'est plus constant mais dépend de la dérive de fréquence linéaire exprimée par l'indice fractionnaire α . Notons également que cette importante relation assure l'inversion de la *FRFT*. A ce stade de la discussion, il est possible d'établir un encadrement pour le support Δx que l'on ne détaillera pas (cf. [[Numerical calculation of fractional Fourier transforms with a single fast-Fourier-transform algorithm]]). Néanmoins, il vaut :

$$\sqrt{(N/2) \sin 2\alpha} \leq \Delta x \leq \sqrt{N \tan \alpha} \quad (2.68)$$

En pratique, pour le calcul d'une *FRFT* d'ordre α , c'est la borne supérieure de l'encadrement qui sera choisie : $\Delta x = \tan(\alpha)$. Compte tenu des résultats précédents, nous pouvons remarquer que la loi de composition ne peut être simplement réalisée sans prendre de précaution sur les supports. Les graphes de la figure (10) donnent des illustrations de la *FRFT* d'une fonction rectangulaire de $0,5 \text{ mm}$ d'ouverture ($d = 0,5$) pour différents ordres fractionnaires.

Ces résultats sont en concordance avec les résultats présentés par Marinho [[Numerical calculation of fractional Fourier transforms with a single fast-Fourier-transform algorithm]]. Ceci nous permet alors d'envisager différentes études sur l'holographie numérique et l'analyse de faisceaux.

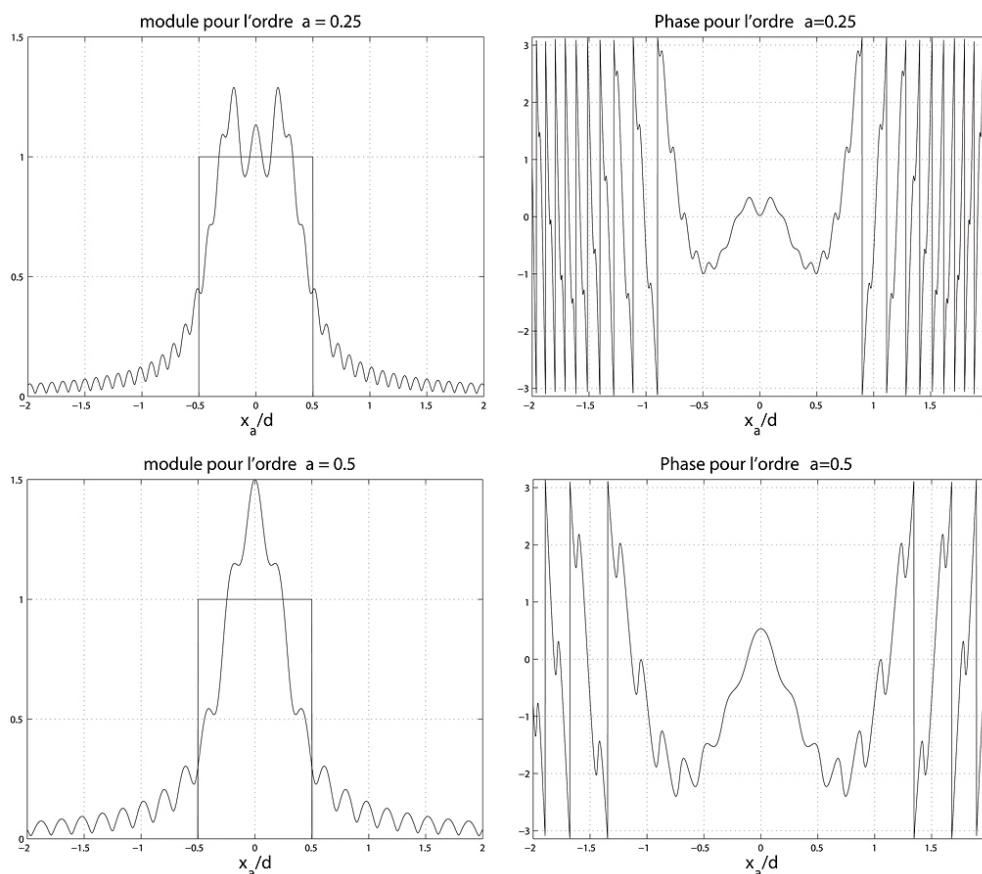


Figure 10 :

Figure 10 : Module et phase de la transformée de Fourier fractionnaire de la fonction rectangulaire d'ouverture $d = 0,5$

Glossaire

Chirp

la traduction française est le chant des oiseaux qui ont l'extraordinaire faculté d'émettre des fréquences qui varient dans le temps, pour le plus beau plaisir de nos oreilles.

Bibliographie

[**Elements de mathématiques du signal**] REINHARD HERVÉ, *Elements de mathématiques du signal*, Tome 1 - Signaux déterministes, Dunod, Paris, 1ère Ed., 1995.

[**Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform**] LOHMANN A. W., *Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform*, J. Opt. Soc. Am., -, A, 10(10) :2181{2186, 1993.

[**Numerical calculation of fractional Fourier transforms with a single fast-Fourier-transform algorithm**] MARINHO FRANCISCO J., BERNARDO LUIS M., *Numerical calculation of fractional Fourier transforms with a single fast-Fourier-transform algorithm*, J. Opt. Soc. Am. A, -, 15(8) :2111{2116, 1998.

[**On Namias's Fractional Fourier Transforms**] MCBRIDE A. C., KERR F.H., *On Namias's Fractional Fourier Transforms*, Journal of Applied Mathematics, IMA, 39 :159{175, 1987.

[**Principles of Optics**] BORN MAX, WOLF EMIL, *Principles of Optics*, 7th Ed., Cambridge University Press, 1999.

[**Temps-Fréquence**] FLANDRIN P., *Temps-Fréquence*, 2ème Ed., Paris, Hermès, -, 1998.

[**The Fractional Fourier Transform**] OZAKTAS H., ZALEVSKY Z., KUTAY M., *The Fractional Fourier Transform*, 1ère Ed., Wiley Press, 2001.

[**The Fractional order Fourier Transform and its application to Quantum**] NAMIAS VICTOR, *The Fractional order Fourier Transform and its application to Quantum Mechanics*, J. Inst. Maths Applics, -, 25 :241-265, 1980.

[**Theory and applications in signal processing**] HLAWATSCH F., MECKLENBRÄUKER W., *Theory and applications in signal processing*, 1ère Ed., The Wigner Distribution, Elsevier, 1997.