

Optique géométrique : Fondamentaux

JACQUES SABATER

Table des matières

I. Présentation	4
II. Cours	5
1. Chemin Optique.....	6
1.1. Minimal ou maximal.....	6
1.2. Milieux homogènes.....	6
1.3. Loi du retour inverse de la lumière.....	7
1.4. Différentielle du chemin optique.....	7
1.5. Modifications de la longueur d'un parcours rectiligne par de petits déplacements des extrémités...7	
1.6. Lois de la réfraction.....	8
2. Systèmes optiques.....	11
2.1. Image stigmatique d'un point lumineux dans un système optique.....	11
2.2. Stigmatisme approché.....	12
3. Dioptries.....	12
3.1. Image d'un point lumineux dans un dioptre.....	13
3.2. Approximation paraxiale.....	14
3.3. Formule de conjugaison paraxiale.....	14
3.4. Points stigmatiques.....	14
3.5. Foyers, distance focale, convergence.....	15
3.6. Grandissement axial gz	15
3.7. Plans conjugués, plans focaux.....	16
3.8. Dimension des images, grandissement transversal, grandissement angulaire.....	16
3.9. Invariants paraxiaux, invariant de Lagrange-Helmholtz.....	18
3.10. Dioptries plans, lame à faces parallèles.....	18
3.11. Prismes.....	19
4. Miroirs.....	19
4.1. Miroirs plans.....	20
4.2. Translation et rotation de miroirs plans.....	20
4.3. Miroirs sphériques.....	21
4.4. Foyers, distance focale, plan focal.....	22
4.5. Construction d'images dans un miroir.....	22
5. Systèmes optiques centrés.....	23
5.1. Invariant de Lagrange-Helmholtz étendu.....	24
5.2. Foyers et plans principaux des systèmes optiques focaux (Ayant des foyers).....	24
5.3. Construction des images.....	25
5.4. Équation de conjugaison aux foyers.....	26
5.5. Convergence, relation entre f et f'	26
5.6. Équation de conjugaison de Descartes, grandissements.....	27
5.7. Points nodaux, points anti-principaux.....	27
5.8. Dimension de l'image d'un objet non ponctuel à l'infini.....	28
5.9. Systèmes optiques réfractifs dans l'air.....	28
6. Association de systèmes.....	28
6.1. Association de deux systèmes optiques.....	28
7. Lentilles.....	29
7.1. Lentilles minces.....	30
7.2. Simulation d'un système optique complexe par une lentille mince.....	31
7.3. Associations de lentilles minces.....	31
8. Systèmes afocaux, grossissement.....	32
8.1. Systèmes afocaux, grossissement.....	32
8.2. Grossissement des systèmes optiques focaux visuels (Loupes, oculaires, microscopes...).....	34
9. Diaphragmes, pupilles et champs.....	34
9.1. Quelques exemples.....	35

III. Etude de cas : Calcul des caractéristiques optiques d'un système à 2 lentilles	37
1. Détermination de la position du foyer image F' de S.....	37
2. Détermination de la position de H'	37
3. Détermination de la position du foyer objet F de S.....	38
4. Calcul du champ de pleine lumière.....	38
IV. Exercices	39
1. Exercice 1.....	39
2. Exercice 2.....	39
3. Exercice 3.....	39
Solution des exercices	40

I.Présentation

Module :

Optique instrumentale, microscopie

Auteur(s) :

Jacques SABATER - Institut d'Optique – Graduate School

Résumé :

La première partie du cours établit les bases fondamentales de l'optique géométrique à partir du principe de Fermat. La deuxième partie, consacrée à l'approximation de Gauss donne les formules générales de calcul des positions des images dans les systèmes optiques. Une troisième partie étudie la formation des images dans des systèmes optiques complexes.

Mots-clés :

Principe de Fermat, Chemin optique, Réfraction, Réflexion, Stigmatisme, Dioptre, Miroir, Conjugaison, Foyer, Distance focale, Grandissement, Grossissement, Lentille, Convergence, Dioptrie, Système optique, Afocal, Pupille, Champ, Lucarne, Lunette, Objectif, Oculaire, Prisme, Jumelles

Pré-requis :

Aucun

Objectif(s) pédagogique(s) :

Ce cours établit les bases de la propagation du rayonnement lumineux dans l'approximation de l'optique géométrique puis l'approximation de Gauss qui permettent un calcul simple des positions des images dans tous les systèmes optiques.

Plan du cours :

- Introduction
- Chemin Optique
- Systèmes optiques
- Dioptries
- Miroirs
- Systèmes optiques centrés
- Association de systèmes
- Lentilles
- Systèmes afocaux, grossissement
- Diaphragmes, pupilles et champs

Conception & production :

PRN - Le Mans Université

Licence :

Licence GNU¹

1 - <http://www.gnu.org/licenses/fdl.txt>

II.Cours

La lumière est composée d'ondes électromagnétiques dont la propagation peut être parfaitement traitée par les équations de Maxwell. Cela est indispensable quand les éléments optiques qui modifient la propagation de l'énergie lumineuse ont des dimensions très petites, proches ou inférieures à la longueur d'onde. Ce n'est bien sûr pas le cas pour la grande majorité des systèmes optiques usuels où l'on peut considérer la longueur d'onde comme infiniment petite par rapport à leurs dimensions géométriques.

Ce cadre est celui de *l'approximation de l'optique géométrique* où la nature ondulatoire de la lumière est négligée, les phénomènes d'interférence, de diffraction et de polarisation sont ignorés. On montre que les lois fondamentales de l'optique géométrique se déduisent des équations de Maxwell en faisant tendre la longueur d'onde vers 0.

Principe de Fermat

Énoncé par Pierre Fermat en 1657, le **principe de Fermat** sert de fondement à l'optique géométrique. Les principales lois de propagation en découlent. L'énoncé par lui-même est on ne peut plus simple : *La lumière suit le trajet le plus court en temps*. En fait on peut montrer que, dans certains cas, c'est le plus long, mais en tous les cas le trajet est extrémal.

L'optique géométrique suppose que les milieux sont isotropes. Un milieu est *isotrope* quand l'indice est indépendant de la direction de propagation et de la direction de polarisation de la lumière. L'indice $n(xyz)$ est donc parfaitement défini en tout point de l'espace. Si $v(xyz)$ est la vitesse locale de propagation dans le milieu et c la vitesse de propagation dans le vide, nous avons en tout point : $n=c/v$

La vitesse de propagation ne dépend que du point considéré, elle est indépendante de la direction de propagation.

Calculons le temps de propagation T_{AB} entre deux points A et B de l'espace pour un trajet effectivement suivi par la lumière :

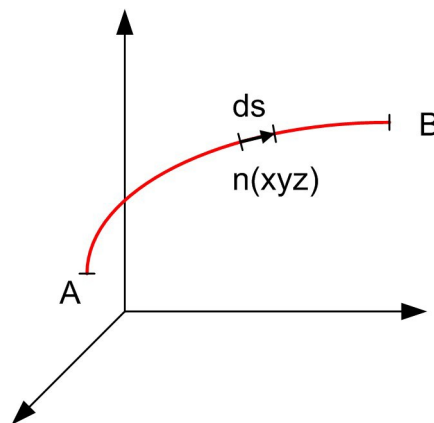


Figure 01

Pour un élément de trajectoire de longueur ds , le temps de propagation dT est :

$$dT = \frac{ds}{v} = \frac{n \cdot ds}{c}$$

Le temps total de propagation est donc :

$$T_{AB} = \frac{1}{c} \cdot \int_A^B n \cdot ds \quad (1)$$

La trajectoire suivie par les rayons lumineux est telle que T soit minimal ou maximal.

1. Chemin Optique

Les temps de parcours, pour des dimensions raisonnables, étant extrêmement brefs, il est plus naturel de multiplier les deux membres de l'expression (1) par c pour obtenir la longueur de chemin optique L_{AB} de A à B :

$$L_{AB} = \int_A^B n \cdot ds \quad (2)$$

Le chemin optique L_{AB} , étant proportionnel à T_{AB} , a les mêmes propriétés. Le principe de Fermat impose donc que L_{AB} soit extrémal entre A et B.

1.1. Minimal ou maximal

Considérons deux points de l'espace A et B dans un milieu homogène. En un point M donné une surface plane dont la normale est la bissectrice de l'angle (AMB) permet au rayon AM de se réfléchir vers MB, la lumière suit donc le trajet AMB. Pour une surface sphérique tangente en M au miroir plan le résultat est identique. Pour ces deux surfaces, seul le rayon se réfléchissant en M passe par B.

La figure ci-dessous est située dans le plan passant par A, B et M. Nous avons tracé l'ellipse tangente en M au miroir plan dont les foyers sont A et B. Tout point M_0 de l'ellipse est tel que $L_0 = AM_0 + M_0B$ est constant.

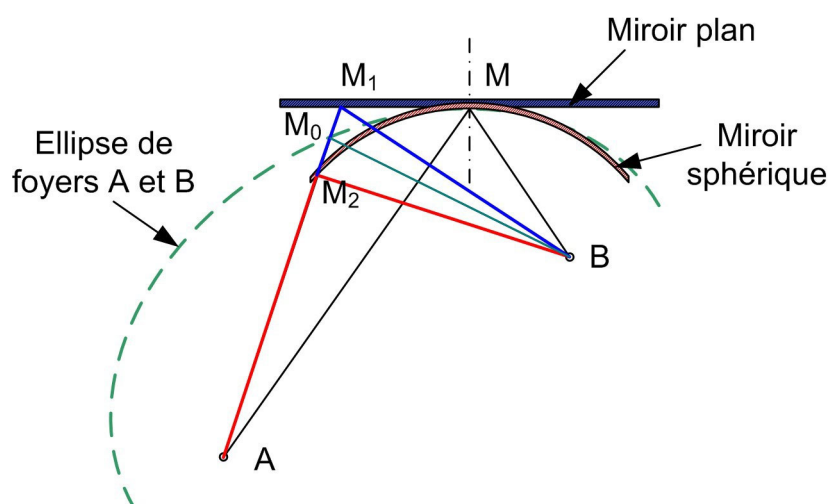


Figure 02

Les chemins optiques pour des points courants sur les surfaces sont :

Miroir plan : $L_1 = AM_1 + M_1B$

Miroir sphérique : $L_2 = AM_2 + M_2B$

Le miroir sphérique ayant un rayon de courbure inférieur à celui de l'ellipse en M, il est évident que : $L_2 < L_0 < L_1$

Pour le miroir plan L est minimal. Pour le miroir sphérique L est maximal.

1.2. Milieux homogènes

Un milieu homogène est un milieu où l'indice est identique en tout point.

L'intégrale (2) donnant L_{AB} devient :

$$L_{AB} = n \cdot \int_A^B ds$$

La ligne droite étant le plus court chemin de A à B , la propagation est rectiligne.

1.3. Loi du retour inverse de la lumière

Dans l'intégrale (2) ds n'est pas signé. Le calcul de B vers A en prenant le même chemin donne exactement le même résultat. $L_{AB} = L_{BA}$

Le chemin extrémal sera donc le même quelque soit le sens. Le chemin suivi par la lumière de A vers B ou de B vers A est identique.

1.4. Différentielle du chemin optique

Considérons deux points A et B de l'espace et le trajet suivi par la lumière de A à B . La longueur de chemin optique de A à B est L .

Soit P un paramètre définissant le trajet de A à B ayant une petite variation dp , A et B restant les extrémités du trajet, et dL la variation induite du chemin optique L .

Le principe de Fermat qui impose à la lumière de suivre une extrémale du chemin optique

$$\frac{dL}{dp} = 0$$

s'écrit :

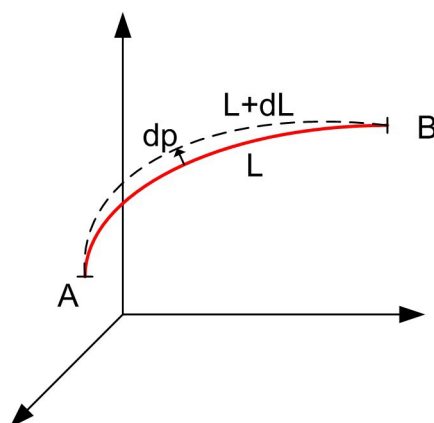


Figure 03

1.5. Modifications de la longueur d'un parcours rectiligne par de petits déplacements des extrémités

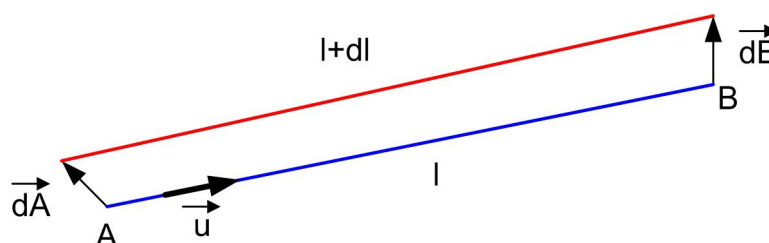


Figure 04

La longueur $l = AB$ peut s'exprimer par le module du vecteur \vec{AB} :

$$l = \vec{u} \cdot \vec{AB}$$

(Produit scalaire)

\vec{u} est le vecteur unitaire dans la direction AB . Pour de petits déplacements de A et de B notés $d\vec{A}$ et $d\vec{B}$, nous avons

$$d(\vec{AB}) = d\vec{B} - d\vec{A}$$

puis

$$dl = d\vec{u} \cdot \vec{AB} + \vec{u} \cdot d(\vec{AB})$$

$d\vec{u}$ est perpendiculaire à \vec{AB} donc $d\vec{u} \cdot \vec{AB} = 0$, on en déduit :

$$dl = \vec{u} \cdot (d\vec{B} - d\vec{A})$$

Si l'indice du milieu est n et $L = nAB$ le chemin optique (AB), la variation de chemin optique dL est :

$$dL = n\vec{u} \cdot (d\vec{B} - d\vec{A}) \quad (3)$$

1.6. Lois de la réfraction

Considérons une surface S de l'espace, séparant deux milieux d'indices respectifs n_1 et n_2 contenant respectivement les points A et B . Le trajet effectivement suivi par la lumière pour aller de A à B passe par le point I sur la surface.

AI est le rayon incident, IB est le rayon réfracté.

$L = n_1 \cdot AI + n_2 \cdot IB$ est le chemin optique (AIB).

Un petit déplacement dI de I provoque une variation dL telle que $dL/dI = 0$ en vertu du principe de Fermat. L'expression (3) appliquée aux parcours AI et IB donne :

$$dL_{AI} = n_1 \vec{u}_1 \cdot (d\vec{I} - d\vec{A}) = n_1 \vec{u}_1 \cdot d\vec{I}$$

de même

$$dL_{IB} = n_2 \vec{u}_2 \cdot (d\vec{B} - d\vec{I}) = -n_2 \vec{u}_2 \cdot d\vec{I}$$

Puisque $d\vec{A} = d\vec{B} = 0$, finalement :

$$dL_{AB} = -(n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1) \cdot d\vec{I}$$

Si \vec{N} est le vecteur unitaire dans la direction de la normale, \vec{V} celui dans la direction $d\vec{I}$.

$d\vec{I} = \vec{V} \cdot dI$ soit :

$$dL_{AB} = -(n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1) \cdot \vec{V} \cdot dI$$

Le principe de Fermat imposant, pour un trajet effectivement suivi par la lumière, $dL/dI = 0$ pour tout $d\vec{I}$, $(n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1)$ et \vec{V} sont perpendiculaires donc $(n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1)$ et \vec{N} sont parallèles.

$(n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1) = k\vec{N}$ montre que \vec{u}_1, \vec{u}_2 et \vec{N} appartiennent à un même plan P .

P est le plan d'incidence, il contient le rayon incident, le rayon réfracté et la normale à la surface en I , i_1 et i_2 sont, dans ce plan, les angles entre les rayons incidents et réfractés par rapport à la normale. On en déduit la relation de réfraction vectorielle :

$$(n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1) = (n_2 \cos i_2 - n_1 \cos i_1) \cdot \vec{N} \quad (4)$$

Et, par projection dans le plan de la surface :

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2 \quad (5)$$

Les lois de Descartes se déduisent des relations précédentes:

Loi 1 : **Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence**

Loi 3 : Les angles i_1 et i_2 des rayons incidents et réfléchis sont tels que $n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$

La loi 2 concerne les surfaces réfléchissantes, pour lesquelles $i_1 = -i_2$. On verra par la suite que les formules des surfaces réfractantes s'appliquent aux surfaces réfléchissantes en prenant $n_2 = -n_1$.

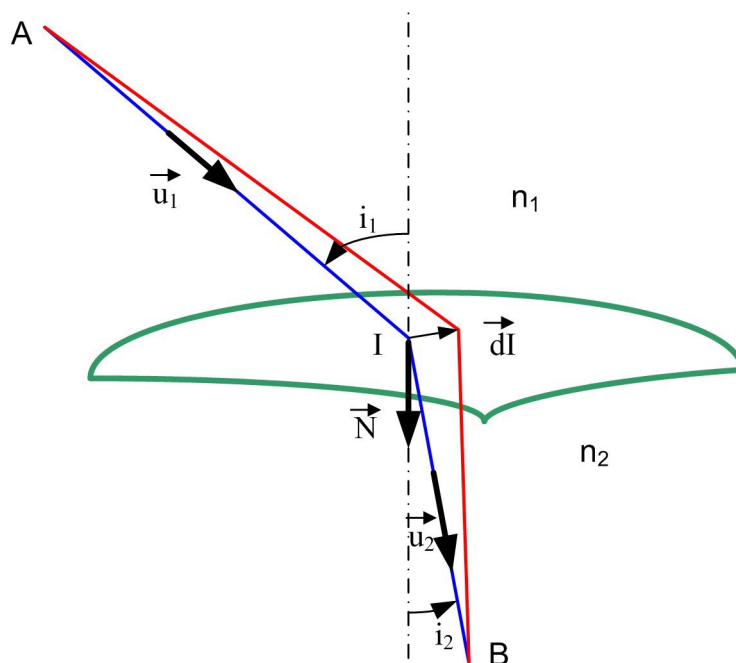


Figure 05

a) Réfraction

Considérons deux milieux d'indices n_1 et n_2 , la troisième loi de Descartes nous donne la relation entre les angles d'incidence et de réfraction dans les deux milieux :

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2 \quad (5)$$

Cette relation est parfaitement symétrique, en accord avec le principe du retour inverse de la lumière. Un rayon venant du deuxième milieu faisant l'angle i_2 avec la normale fera, après réfraction par la surface, un angle i_1 dans le premier milieu satisfaisant à la relation (5).

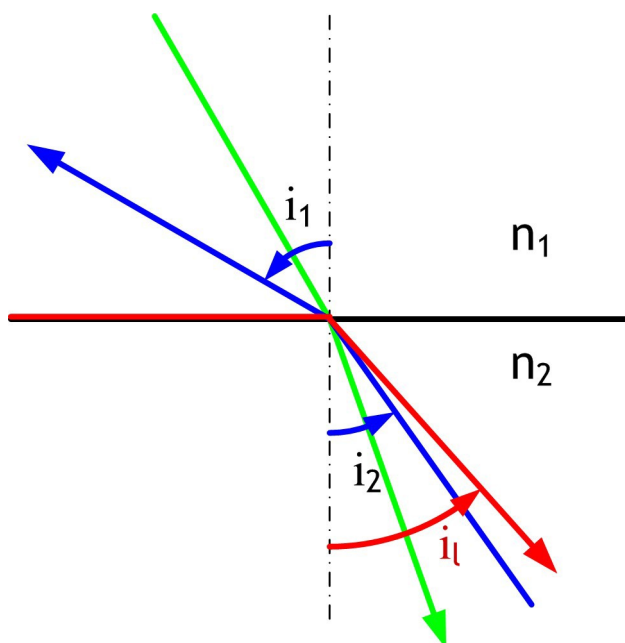


Figure 06

b) Angle limite

Angle limite

Pour $i_1 = 90^\circ$, incidence rasante, le rayon réfracté fait, avec la normale l'angle i_2 tel que : $\sin i_2 = n_1/n_2$.

i_2 est alors appelé l'angle limite i_l

$$i_l = \arcsin(n_1/n_2) \quad (6)$$

Tout rayon provenant du deuxième milieu dont l'angle d'incidence i_2 est supérieur à i_l subit une **réflexion totale**. Si le premier milieu est l'air ($n_1 = 1$), le tableau ci-dessous donne quelques valeurs de i_l :

Deuxième milieu	Indice pour $\lambda = 587 \text{ nm}$	Angle limite i_l (deg)
Eau	1,333	48,6
Verre bas indice (BK7)	1,516	41,3
Verre haut indice (SF6)	1,805	33,6
Diamant	2,418	24,4

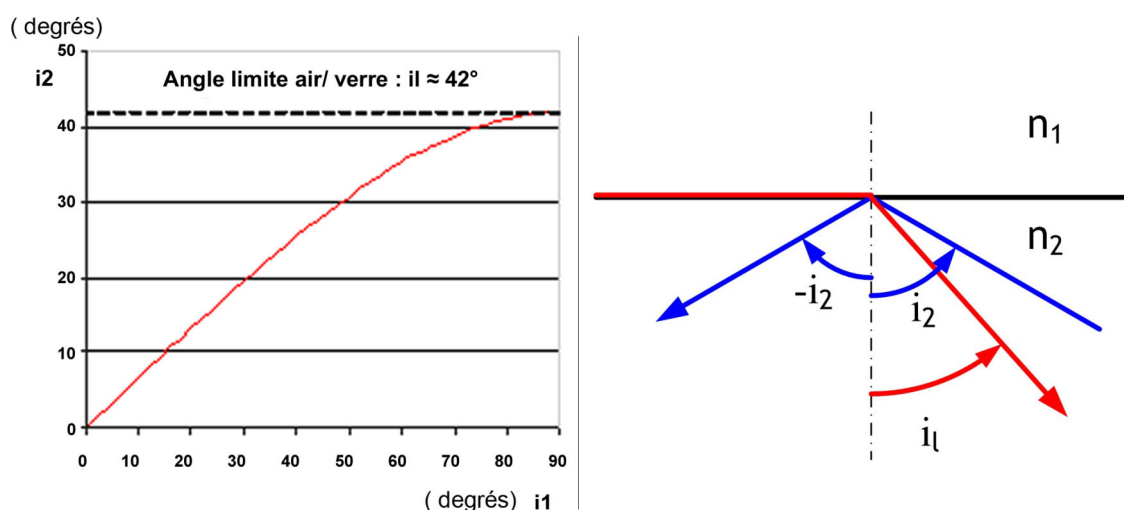


Figure 07 & Figure 08

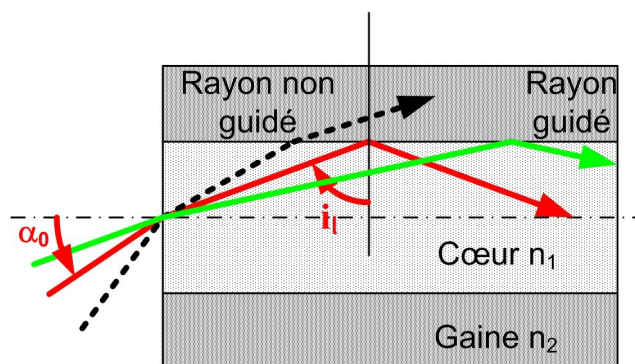
Réflexion totale dans une fibre optique multimodale :

Figure 09

L'indice du cœur est n_1 , l'indice de la gaine est $n_2 < n_1$.

Un rayon lumineux qui a une incidence supérieure à i_l sur l'interface cœur-gaine se réfléchit totalement, il est guidé.

Son incidence à l'entrée de la fibre est inférieure à α_0 .

α_0 est le demi-angle d'ouverture de la fibre. L'ouverture numérique de la fibre est :

$$NA = \sin(\alpha_0) = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

2. Systèmes optiques

Un système optique est un ensemble de surfaces qui réfléchissent (miroirs) ou réfractent (dioptries) les rayons lumineux. Un système centré possède un axe de symétrie. Les systèmes ne possédant que des dioptries sont dits dioptriques (lentilles, objectifs, lunettes, microscopes). Les systèmes comportant des dioptries et des miroirs sont dits catadioptriques (télescopes).

2.1. Image stigmatique d'un point lumineux dans un système optique

Considérons un point A dans un premier espace appelé « **espace objet** ». Faisons partir de A un ensemble de rayons lumineux passant à travers le système. Si ces rayons convergent tous en un même point A' de l'**espace image** nous pouvons écrire :

- A' est l'image de A à travers le système. On dit aussi que A' est le conjugué de A .
- Le système est dit stigmatique pour la conjugaison AA' .

On montre que le stigmatisme implique une valeur constante pour le chemin optique (AA').

Cas d'une **image réelle** :

L'image peut être observée sur un écran dans l'espace image

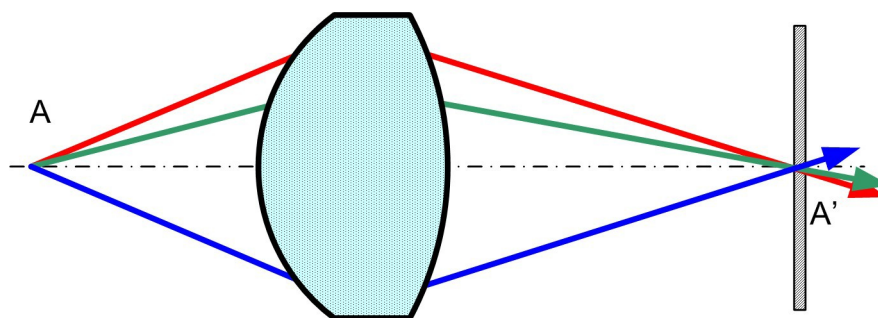


Figure 10

Cas d'une **image virtuelle** :

L'image ne peut être observée sur un écran. Elle est néanmoins visible par un observateur situé dans l'espace image

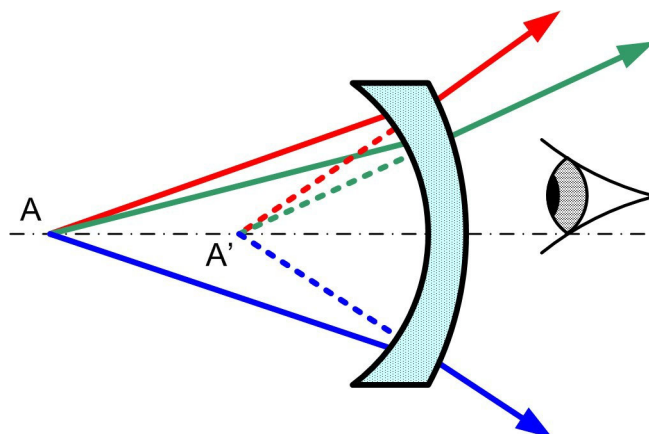


Figure 11

2.2. Stigmatisme approché

Quelques systèmes optiques très simples sont rigoureusement stigmatiques :

- Le miroir parabolique pour un point objet à l'infini sur l'axe
- Un miroir elliptique pour une conjugaison entre les foyers géométriques
- Un miroir plan stigmatique pour tous les points de l'espace
- ...

Ces systèmes sont peu nombreux et ne sont stigmatiques que pour un unique point objet. D'une manière générale, les systèmes optiques ne sont pas rigoureusement stigmatiques.

Dans ce cas, l'image d'un point objet sur un écran ou un récepteur de lumière (film, matrice CCD) est une tache de diffusion. Si la dimension de celle-ci est inférieure au grain du film ou au pixel de la matrice CCD, elle sera vue comme quasi-ponctuelle, le système optique sera équivalent à un système stigmatique. On dit qu'il y a stigmatisme approché.

Le calcul d'optimisation des systèmes optiques consiste à rendre ces taches de diffusion suffisamment petites en tout point de l'image.

3. Dioptries

Un dioptré est une surface séparant deux milieux d'indices différents. À part ceux comportant des miroirs ou des surfaces diffractantes, les systèmes optiques classiques (objectifs de prise de vue et de projection, lunettes, microscopes...) sont exclusivement composés d'un certain nombre de dioptries.

Les systèmes optiques ont généralement un axe de révolution et les dioptries utilisés sont généralement sphériques ou plans. L'axe du système est la droite passant par les centres de courbure des dioptries, il est perpendiculaire aux dioptries plans.

Certains systèmes optiques peuvent comporter des surfaces asphériques de révolution autour de l'axe du système. Ces asphérisations sont nécessaires à la correction des aberrations dont l'étude ne fait pas partie de ce cours. Une telle surface sera assimilée au dioptré sphérique dont le rayon de courbure est identique à celui de la surface sur l'axe du système optique.

3.1. Image d'un point lumineux dans un dioptre

Considérons un dioptre sphérique séparant deux milieux d'indices n et n' , défini par son centre de courbure C , son sommet S , son rayon de courbure $R = \overline{SC}$.

Toutes les longueurs et les angles sont orientés en utilisant la convention de la trigonométrie.

Un point A est situé dans l'espace objet sur la droite SC . Le rayon issu de A passant par S est perpendiculaire au dioptre, il n'est pas dévié. Un autre rayon issu de A passant par un point quelconque I du dioptre subit une réfraction le rayon émergent coupe SC en un point A' .

Cherchons la position de A' . Suivant la figure 12 :

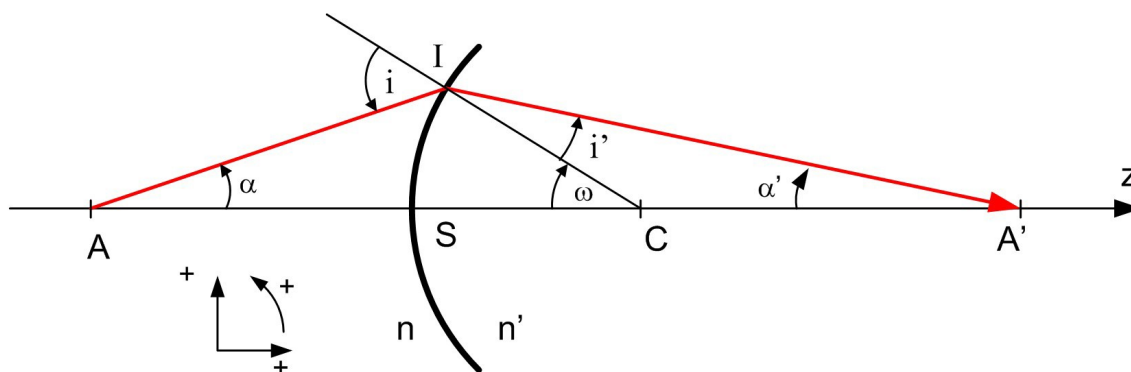


Figure 12

i est l'angle d'incidence du rayon sur le dioptre

i' est l'angle de réfraction, et, d'après (5), $n \cdot \sin(i) = n' \cdot \sin(i')$

Une formule classique dans le triangle CAI donne :

$$\frac{\overline{CA}}{\sin(\pi - i)} = \frac{\overline{CA}}{\sin(i)} = -\frac{\overline{IA}}{\sin(\omega)}$$

$(\overline{CA} < 0, \overline{IA} < 0, \omega < 0, i > 0)$

On peut écrire aussi :

$$\frac{\overline{CA'}}{\sin(i')} = -\frac{\overline{IA'}}{\sin(\omega)}$$

et donc :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{IA} \cdot \sin(i)}{\overline{IA'} \cdot \sin(i')} = \frac{n \cdot \overline{IA}}{n' \cdot \overline{IA'}} \quad (7)$$

Le stigmatisme de la conjugaison voudrait que A' ne dépende pas de la position de I . Il faut alors que $\overline{CA'}$ reste fixe de même que le rapport $\overline{IA}/\overline{IA'}$. Ceci n'est obtenu que dans une position particulière de A et n'est pas réalisé dans le cas général.

La figure 13 montre concrètement un exemple de tracé de rayon dans un dioptre, l'aberration y est importante. Ce tracé est obtenu avec le logiciel gratuit Oslo-Edu téléchargeable à l'adresse : <http://www.lambdaires.com/downloads/index.phtml#osloedu>

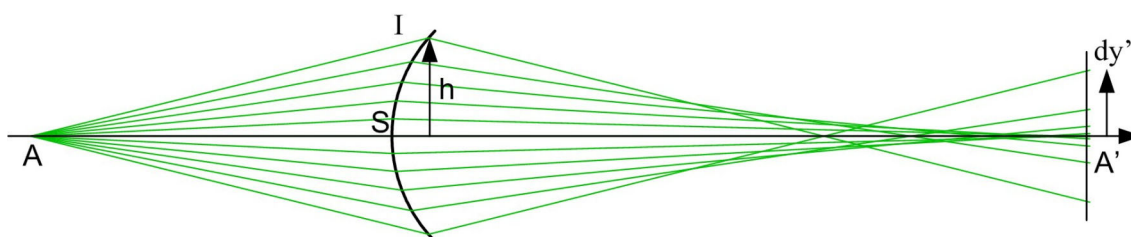


Figure 13

2 - <http://www.lambdaires.com/downloads/index.phtml#osloedu>

3.2. Approximation paraxiale

La figure 13 montre que l'aberration transversale du rayon augmente avec la hauteur d'incidence h de I sur le dioptré. Cherchons la limite A' de l'intersection du rayon réfracté quand h tend vers 0. Quand I tend vers S , la relation (7) devient :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} = \frac{n \cdot \overline{SA}}{n' \cdot \overline{SA'}} \quad (8)$$

L'étude des aberrations montre que l'écart de distance dy' entre le rayon réfracté et A' dans un plan passant par A' et perpendiculaire à l'axe est approximativement proportionnel à h^3 .

Pour de petites valeurs de h , dy' est très faible, il y a un stigmatisme approché.

Dans ce cas, les incidences i et i' du rayon sur la surface du dioptré sont faibles, les valeurs des sinus et des angles en radian sont très proches, la relation (5) devient : $n \cdot i = n' \cdot i'$

Une incidence de 5° pour laquelle nous avons $[i - \sin(i)]/i \approx 1,2 \cdot 10^{-3}$ est une bonne limite pour cette approximation. On dit alors que A' est l'image de A dans l'approximation paraxiale, appelée aussi approximation de Gauss. **Dans l'approximation paraxiale, tous les dioptrés donc tous les systèmes optiques dioptriques sont stigmatiques**

3.3. Formule de conjugaison paraxiale

Soit z l'axe du système optique et S l'origine des coordonnées, nous avons :

$$\overline{SA} = z$$

$$\overline{SA'} = z'$$

$$\overline{SC} = R$$

et donc :

$$\overline{CA} = z - R$$

$$\overline{CA'} = z' - R$$

La relation (8) devient, en remplaçant par les valeurs ci-dessus, et après simplification :

$$\frac{n'}{z'} = \frac{n}{z} + \frac{n' - n}{R} \quad (9)$$

3.4. Points stigmatiques

Tout point du dioptré est image de lui-même, cette conjugaison est évidemment stigmatique.

Tout rayon lumineux issu du centre de courbure C est perpendiculaire au dioptré et n'est pas dévié. C est donc image de lui-même et la conjugaison est stigmatique.

Il existe une autre conjugaison stigmatique du dioptré pour laquelle la relation (7) est rigoureusement vérifiée. Ces points, situés du même côté du dioptré, satisfont rigoureusement la relation : $n' \cdot IA' = n \cdot IA$

Le chemin optique (AA'), $L = n \cdot \overline{AI} + n' \cdot \overline{IA'}$ est rigoureusement nul, ceci montre le stigmatisme. La figure 14 est un exemple de ce type de conjugaison ($n = 1,8$ et $n' = 1$). Ces points particuliers sont **les points d'Young-Weierstrass**, ils sont souvent utilisés en microscopie.

Pour ces points :

$$\overline{SA} = z = \frac{(n + n')R}{n} \quad \overline{SA'} = z' = \frac{(n + n')R}{n'}$$

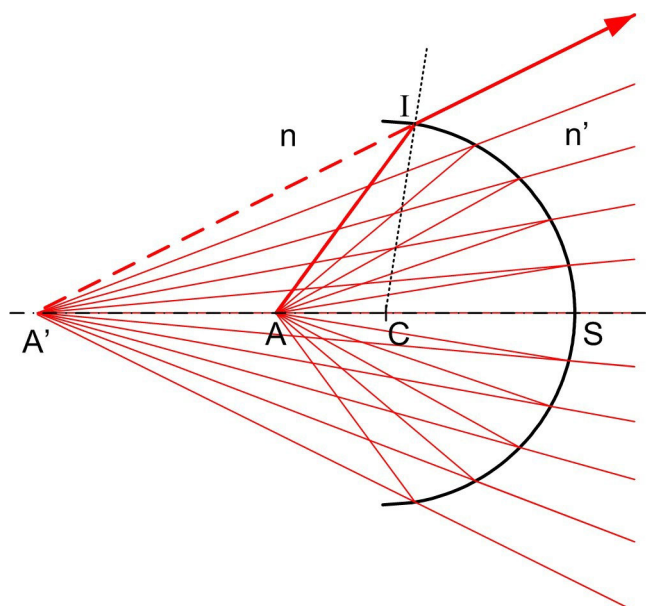


Figure 14

3.5. Foyers, distance focale, convergence

Le foyer image est l'image du point à l'infini sur l'axe :

$$\frac{1}{z} = 0 \Rightarrow z' = f' = \frac{n'R}{n' - n}$$

F' est foyer image, $\overline{SF'} = f'$ est la distance focale image du dioptre.

Le foyer objet est tel que son image soit à l'infini sur l'axe :

$$\frac{1}{z'} = 0 \Rightarrow z = f = -\frac{nR}{n' - n}$$

F est le foyer objet $\overline{SF} = f$ est la distance focale objet du dioptre.

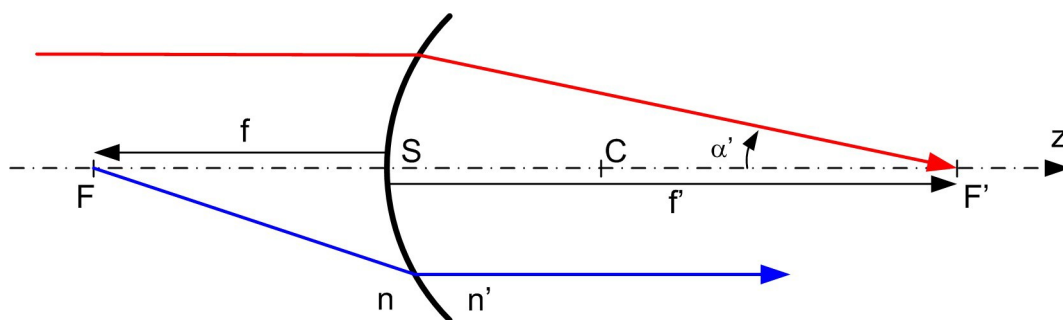


Figure 15

f et f' et la convergence C_v du dioptre sont liés par la relation suivante :

$$C_v = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} = \frac{n' - n}{R}$$

3.6. Grandissement axial gz

Le grandissement axial concerne de petits déplacements dz et dz' de l'objet et de l'image.

La différentielle de l'équation de conjugaison donne

$$-\frac{n'dz'}{z'^2} = \frac{-ndz}{z^2}$$

d'où :

$$g_z = \frac{dz'}{dz} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{z'^2}{z^2} \quad (10)$$

g_z est toujours positif, les petits déplacements de l'objet et de l'image sont toujours dans le même sens.

3.7. Plans conjugués, plans focaux

Un ensemble de points objets situés sur une sphère de centre C passant par A , ont pour image des points situés sur une sphère de centre C passant par A' , le faisceau axial pivotant autour de C . La surface objet sphérique a pour image une surface image sphérique. Le fait que les images ne se forment pas dans un plan est l'aberration de «courbure de champ».

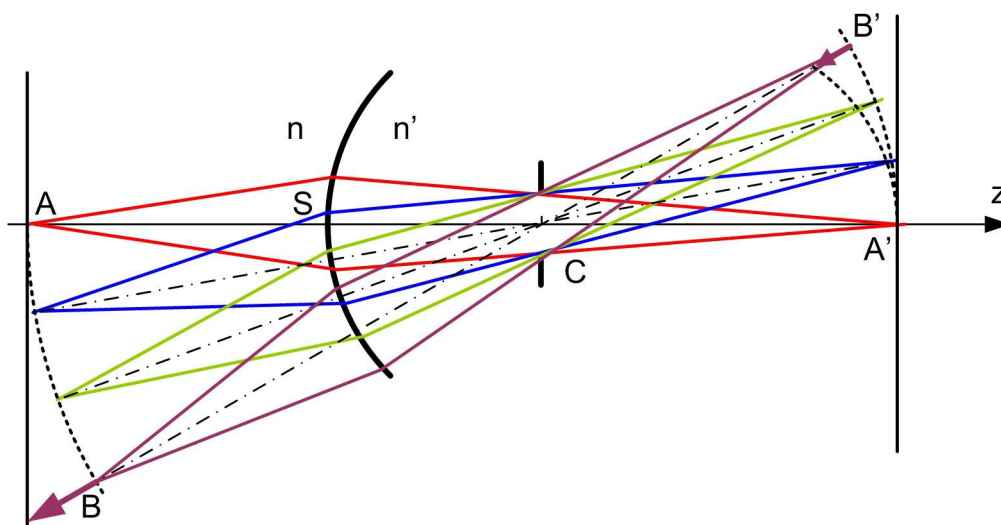


Figure 16

Suivant la figure 16, si l'on déplace un point objet B situé hors axe dans le sens négatif suivant la droite BC jusqu'au plan perpendiculaire à l'axe passant par A , son image B' se déplace dans le même sens puisque g_z est positif. Ce déplacement augmente la courbure de champ image, l'image d'un plan n'est donc pas un plan.

Dans le cadre de l'approximation paraxiale, nous allons négliger ces courbures car les angles sont petits ainsi que les distances des objets et images à l'axe. L'écart entre la position réelle de l'image et le plan passant par A' est du 2^{ème} ordre par rapport à la distance à l'axe. D'une manière générale l'approximation paraxiale ne conserve que les termes du premier ordre.

Dans l'approximation paraxiale l'image d'un plan est un plan.

Tout point objet à l'infini a une image dans le **plan focal image**, plan perpendiculaire à l'axe passant par F' .

Tout point du **plan focal objet**, plan perpendiculaire à l'axe passant par F , a une image à l'infini.

3.8. Dimension des images, grandissement transversal, grandissement angulaire

Considérons un objet AB situé à une distance z du dioptré de rayon R dans un plan perpendiculaire à l'axe. Son image est $A'B'$ à la distance z' . Soient $y = AB$ et $y' = A'B'$

Dans l'approximation paraxiale suivant la figure 17 :

- $A'B'$ est perpendiculaire à l'axe
- θ est l'angle de champ objet, θ étant petit, $\tan(\theta) = \theta = y/z$

- De même, θ' est l'angle de champ image et $\theta' = y'/z'$
- La réfraction en S du rayon partant de B est telle que : $n\theta = n'\theta'$

On en déduit la dimension y' de l'image :

$$y' = y \cdot \frac{nz'}{n'z}$$

et le grandissement transversal g_y :

$$g_y = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{y'}{y} = \frac{nz'}{n'z} \quad (11)$$

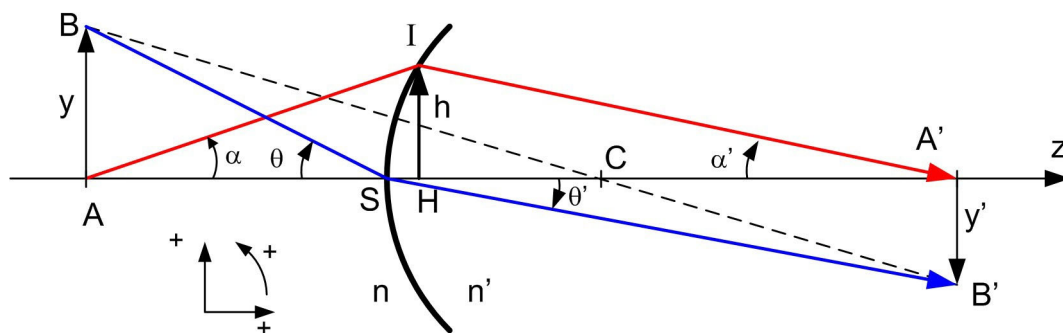


Figure 17

On définit, pour une conjugaison (AA') donnée, un grandissement angulaire $g_\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha}$ entre les angles par rapport à l'axe de deux rayons conjugués passant par A et A' .

Suivant la figure 17, I est l'intersection des rayons avec le dioptre et $h = \overline{HI}$ la distance de I à l'axe. Dans l'approximation paraxiale, h est petit, la courbure du dioptre est négligée et H est supposé confondu avec S . Nous avons :

$$\alpha = -\frac{h}{z} \text{ et } \alpha' = -\frac{h}{z'}$$

On en déduit :

$$g_\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{z}{z'} \quad (12)$$

Dans le cas où l'objet AB est à l'infini, sa dimension transversale est donné par son angle de champ θ . Suivant la figure 18, A est sur l'axe, son image est F' , B' , image de B est dans le plan focal image à une distance y' de l'axe telle que :

$$y' = f' \cdot \theta' = \frac{n}{n'} f' \cdot \theta = -f \cdot \theta$$

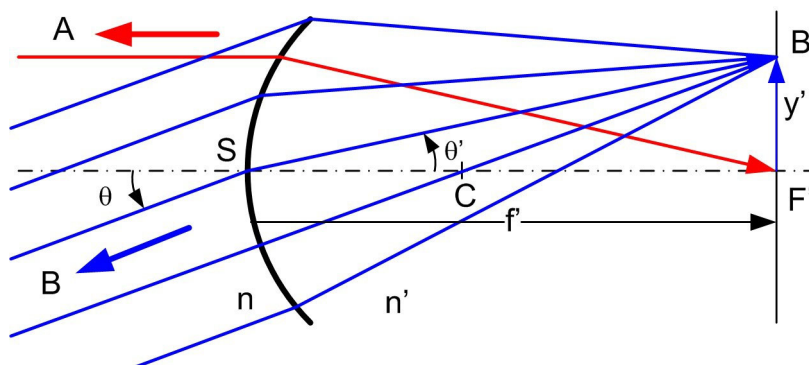


Figure 18

3.9. Invariants paraxiaux, invariant de Lagrange-Helmholtz

D'après la relation de conjugaison :

$$\frac{n'}{z'} - \frac{n}{z} = \frac{n' - n}{R}$$

il vient l'invariant longitudinal :

$$Q_z = n\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{z}\right) = n'\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{z'}\right)$$

La relation du grandissement transversal :

$$G_y = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \times \frac{z'}{z}$$

donne l'invariant transversal :

$$G_y = \frac{ny}{z} = \frac{n'y'}{z'}$$

En effectuant le produit g_α nous avons :

$$g_y \cdot g_\alpha = \frac{y'\alpha'}{y\alpha} = \frac{n}{n'}$$

On en déduit **l'invariant de Lagrange-Helmholtz**

$$ny\alpha = n'y'\alpha' \quad (13)$$

3.10. Dioptrès plans, lame à faces parallèles

Ils sont caractérisés par $1/R = 0$. Les formules deviennent :

$$\frac{z'}{z} = \frac{n'}{n} \text{ et } g_y = 1$$

Un dioptré plan est parfaitement stigmatique pour tout point objet à l'infini.

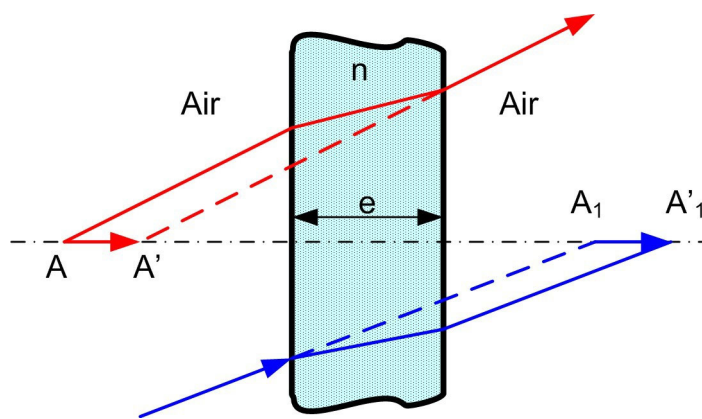


Figure 19

La lame à faces parallèles est composée de deux dioptrès plans distants de e , n est l'indice du milieu. Un point objet A a pour image un point A' situé sur la perpendiculaire menée de A aux faces de la lame.

On montre que

$$\overline{AA'} = e \frac{n-1}{n} \quad (14)$$

Ceci est vrai pour tout point A de l'espace, réel ou virtuel. Pour un objet donné ce déplacement est indépendant de la position de la lame.

3.11. Prismes

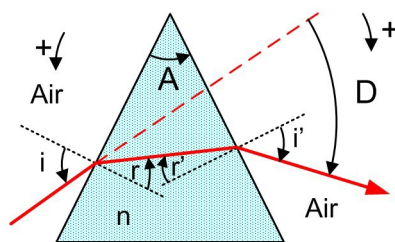


Figure 20

Un prisme d'indice n est composé de deux dioptries plans faisant un angle A . Suivant la figure 20, un rayon lumineux entre par la face 1 sous l'incidence i et sort par la face 2 sous l'incidence i' , les angles de réfraction correspondants dans le prisme sont r et r' , D est la déviation du rayon provoquée par le prisme. La convention de signe angulaire est normale pour la face 1 et inversée pour la face 2.

Nous avons le formulaire suivant :

$$\sin(i) = n \cdot \sin(r)$$

$$\sin(i') = n \cdot \sin(r')$$

$$A = r + r'$$

$$D = i + i' - A$$

Au minimum de déviation : $i = i'$ et $r = r'$, on obtient une relation entre n , A et D permettant des mesures d'indice de matériaux optiques :

$$n = \frac{\sin[(A + D) / 2]}{\sin(A/2)} \quad (15)$$

4. Miroirs

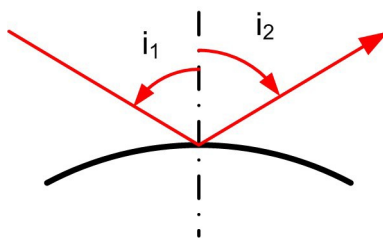


Figure 21

Les miroirs de qualité optique sont généralement composés d'une surface de verre polie plane, convexe ou concave sur laquelle a été déposé un traitement réfléchissant.

Un rayon lumineux qui se réfléchit sur un miroir suit la 2^{ème} loi de Descartes :

Si i_1 et i_2 sont les angles du rayon incident et du rayon réfléchi par rapport à la normale à la surface, nous avons :

$$i_2 = -i_1 \quad (16)$$

4.1. Miroirs plans

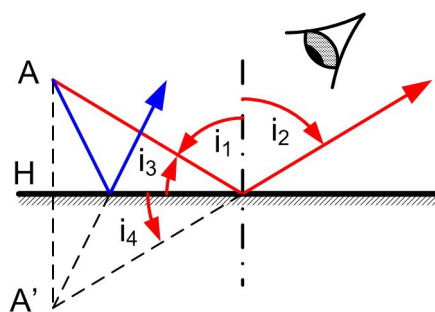


Figure 22

Soit un point objet A et H sa projection sur le miroir. Tout rayon issu de A suit la loi (16). La prolongation du rayon réfléchi coupe la droite AH en un point A' . Sur la figure 22 on montre aisément que, si les valeurs absolues de i_1 et i_2 sont égales, celles de i_3 et i_4 le sont aussi et $HA = HA'$.

Le point A' est le symétrique de A par rapport au miroir.

Ceci est vrai pour tous les rayons lumineux issus de A , l'image est stigmatique, la figure 22 montre un objet réel et une image virtuelle. Si l'on inverse le sens des rayons lumineux, l'objet devient A' , virtuel et l'image devient A , réelle.

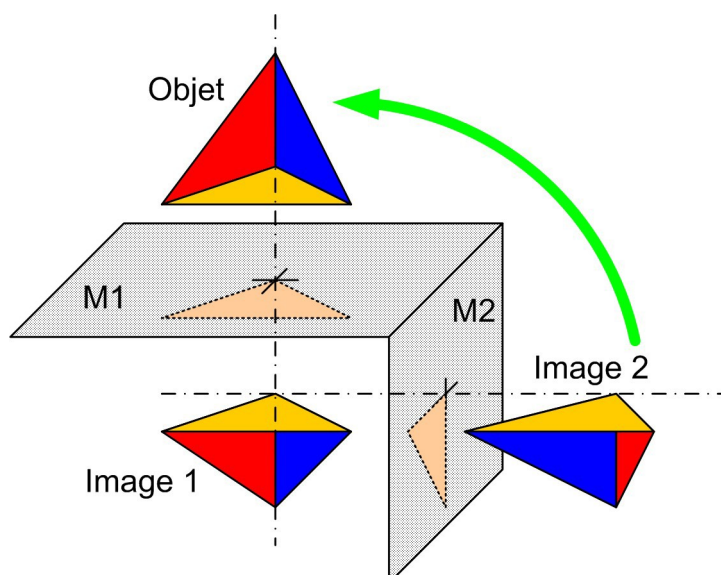


Figure 23

L'image d'un objet en volume par un miroir plan a des dimensions identiques à l'objet mais ne lui est pas superposable. On dit que l'image est **gauche**. Une deuxième image obtenue de la première image par un deuxième miroir redevient superposable à l'objet, par une translation ou une rotation comme sur la figure 23, on dit que l'image est **droite**.

Dans les instruments visuels tels que lunettes ou jumelles, un nombre pair de réflexions assure une image droite.

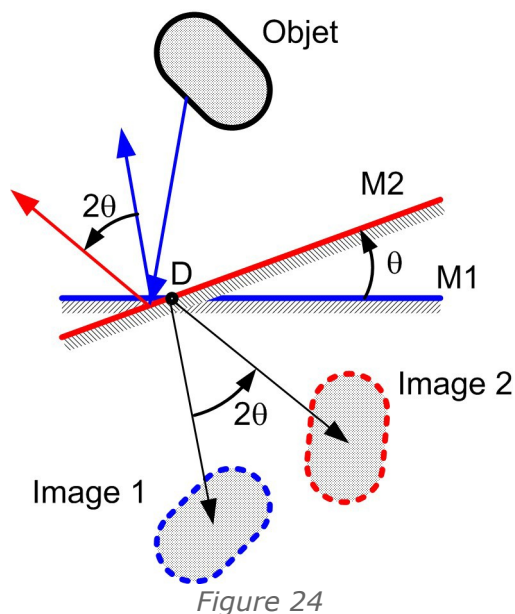
4.2. Translation et rotation de miroirs plans

Une translation d'un miroir plan de vecteur perpendiculaire \vec{v} au miroir entraîne une translation de l'image de vecteur $2\vec{v}$.

Une rotation d'un miroir plan M_1 d'angle θ autour d'un axe quelconque parallèle à M_1 donne un miroir plan M_2 qui coupe M_1 suivant une droite D parallèle à l'axe de rotation.

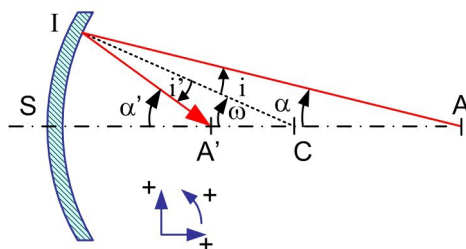
L'image d'un objet dans M_2 est obtenue à partir de l'image dans M_1 par une rotation d'axe D et d'angle 2θ .

Ceci est vrai pour un rayon lumineux ou un faisceau de rayons.



4.3. Miroirs sphériques

Un miroir sphérique est une surface réfléchissante concave ou convexe définie par son centre de courbure C et un sommet S situé sur la surface. Le rayon de courbure est $R = \overline{SC}$



Considérons un point A de la droite SC . Un rayon lumineux issu de A se réfléchit en un point I du miroir et coupe la droite SC en A' . En effectuant le même calcul et le même raisonnement que pour les dioptrés, nous avons :

$$\frac{\overline{CA}}{\sin(i)} = -\frac{\overline{IA}}{\sin(\omega)}$$

et

$$\overline{FA} = z - f$$

or $\sin(i) = -\sin(i')$ donc :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{IA} \cdot \sin(i)}{iA' \cdot \sin(i')} = -\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}}$$

L'expression ci-dessus est analogue à celle des dioptrés (7) en remplaçant n' par $-n$. Nous avons donc, comme pour le dioptre, $\overline{SA} = z$ $\overline{SA'} = z'$ $\overline{SC} = R$:

$$\frac{1}{z'} + \frac{1}{z} = \frac{2}{R} \quad (17)$$

$$g_y = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{y'}{y} = -\frac{z'}{z} \quad (18)$$

$$g_\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{z}{z'}$$

math : inchangé

$$g_z = \frac{dz'}{dz} = -\frac{z'^2}{z^2} \quad (19)$$

math : toujours négatif

Ces formules sont identiques que le miroir soit concave ou convexe.

La formule de conjugaison est symétrique en z et z' . Si A' est image de A , A est image de A' .

4.4. Foyers, distance focale, plan focal

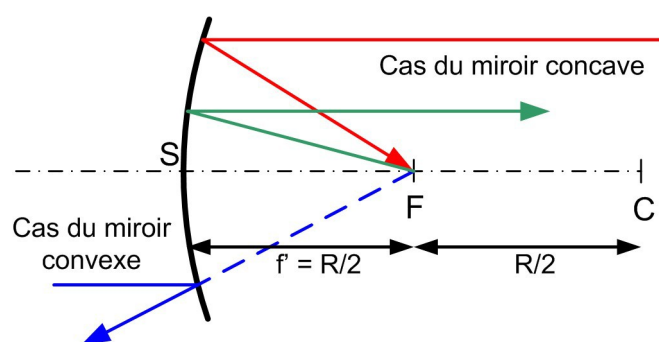


Figure 26

Si l'objet est à l'infini ($1/z = 0$), d'après (17), l'image, en F' , est telle que $z' = f' = R/2$. De même, pour le foyer objet F , nous avons $1/z' = 0$ et $z = f = R/2$.

F et F' sont confondus et sont au milieu du segment SC.

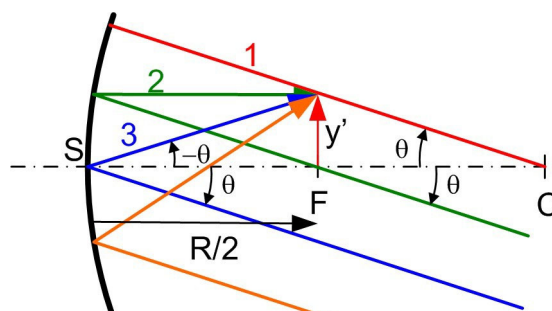


Figure 27

Le plan focal contient les images des points à l'infini.

Un objet à l'infini est caractérisé par un faisceau de rayons parallèles faisant l'angle θ avec l'axe optique. Suivant la figure 27, le rayon 1 passant par C se réfléchit sur lui-même, le rayon 2 passant par F se réfléchit parallèlement à l'axe. Le rayon 3 passant par S se réfléchit symétriquement par rapport à l'axe.

La dimension y' de l'image est : $y' = -\theta \cdot R/2$

4.5. Construction d'images dans un miroir

Depuis le point B de l'objet AB , le rayon passant par C (Rouge) se réfléchit sur lui-même, le rayon passant par F (Vert) se réfléchit parallèlement à l'axe, le rayon parallèle à l'axe (Bleu)

se réfléchit en passant par F et le rayon passant par S (Orange) se réfléchit symétriquement par rapport à l'axe.

B' est à l'intersection des rayons émergents, A' est sur la perpendiculaire abaissée de B' sur l'axe.

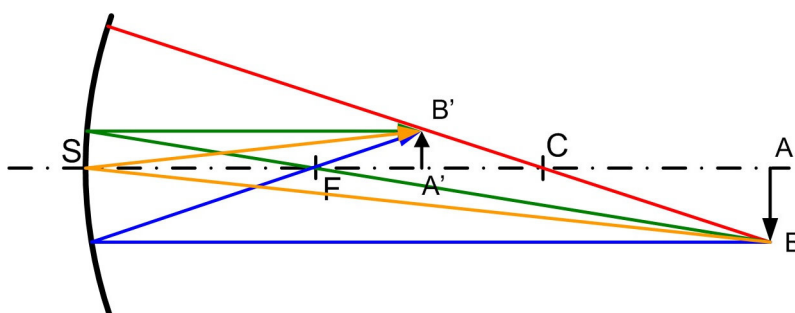


Figure 28 : Miroir Concave

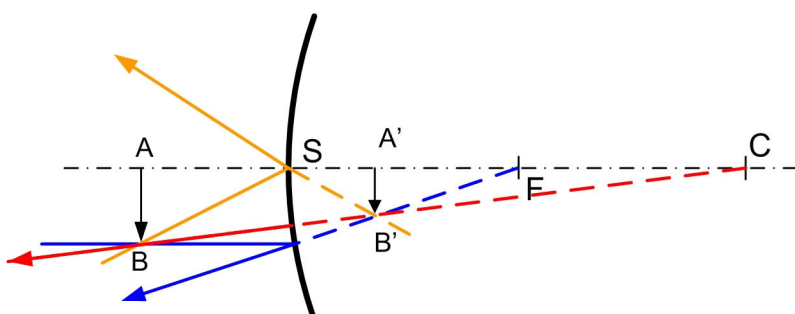


Figure 29 : Miroir Convexe

5. Systèmes optiques centrés

Un système optique centré est composé d'une succession de dioptres ou de miroirs. Il a un axe de symétrie de révolution. Nous avons vu que, d'une manière générale, le stigmatisme n'existe pas. L'approximation paraxiale permet de négliger les défauts de stigmatisme et de supposer que ces systèmes sont parfaits. Ceci est indispensable pour calculer les positions des images.

Plus encore, les systèmes optiques sont, en général, corrigés des aberrations conduisant à un stigmatisme approché. La position des images est alors celle de l'imagerie paraxiale, même si les angles d'incidence sur les surfaces optiques sont bien au-delà de l'approximation paraxiale.

En effet le stigmatisme implique que tous les rayons lumineux convergent au même point.

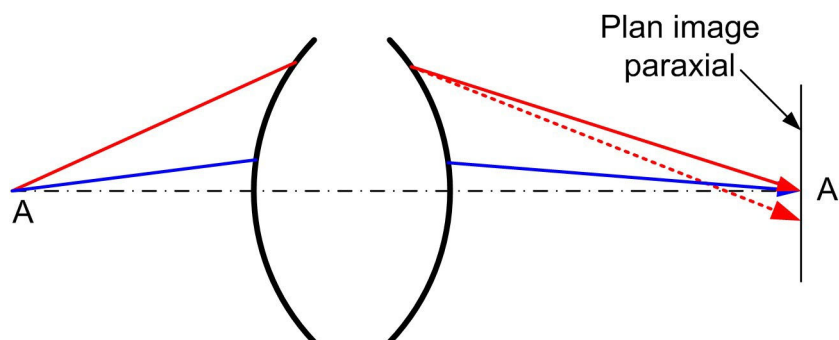


Figure 30

Le stigmatisme paraxial donne une position de convergence qui devient alors celle de l'ensemble des rayons lumineux émergeant du système. Suivant la figure 30, un rayon marginal doit converger sur l'image paraxiale pour que le stigmatisme soit assuré.

En outre, la correction des aberrations entraîne l'absence de courbure de champ et un grandissement constant, ce qui est aussi une des caractéristiques des conjugaisons paraxiales.

Un système optique centré quelconque corrigé des aberrations a son imagerie parfaitement déterminée par l'imagerie paraxiale.

5.1. Invariant de Lagrange-Helmoltz étendu

Un système optique est composé de plusieurs dioptries $D1, D2, D3, \dots$

Pour chaque dioptrie nous avons suivant (13) : $n_1 y_1 \alpha_1 = n_2 y_2 \alpha_2 = n_3 y_3 \alpha_3 \dots$

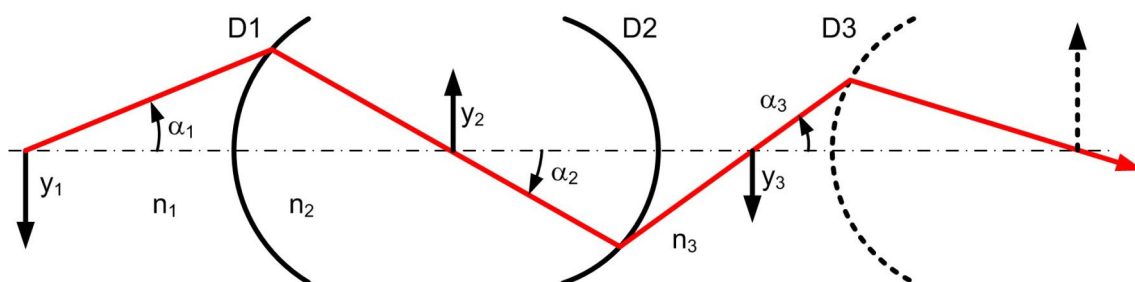


Figure 31

Par conséquent, pour tout système optique S , pour tout objet AB de dimension y ayant pour image dans $SA'B'$ de dimension y' , et un rayon lumineux partant de A faisant l'angle α avec l'axe, arrivant en A' sous l'angle α' , nous avons :

$$ny\alpha = n'y'\alpha' \quad (20)$$

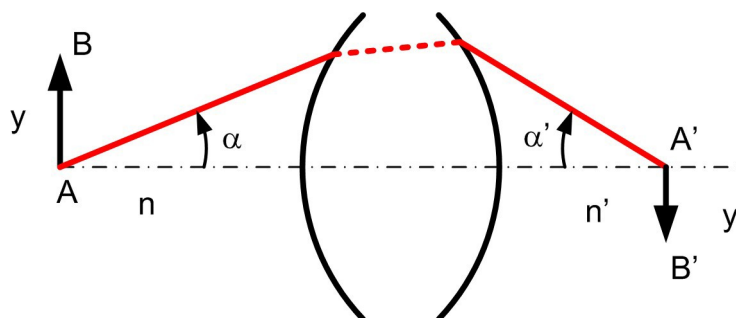


Figure 32

5.2. Foyers et plans principaux des systèmes optiques focaux (Ayant des foyers)

Par définition, le foyer image F' d'un système optique est l'image du point à l'infini sur l'axe. Le faisceau issu de ce point est formé de rayons parallèles à l'axe.

Ces rayons se focalisent en F' après traversée du système. Le lieu des points d'intersection de chaque rayon incident avec son rayon image correspondant est, dans l'approximation paraxiale un plan qui sera appelé **plan principal image** du système optique.

Ce plan coupe l'axe en H' , $f' = \overline{H'F'}$ est la distance focale image du système optique. H' est le point principal image. On procède de la même façon pour le foyer objet F , le plan principal objet, la distance focale objet $f = \overline{HF}$.

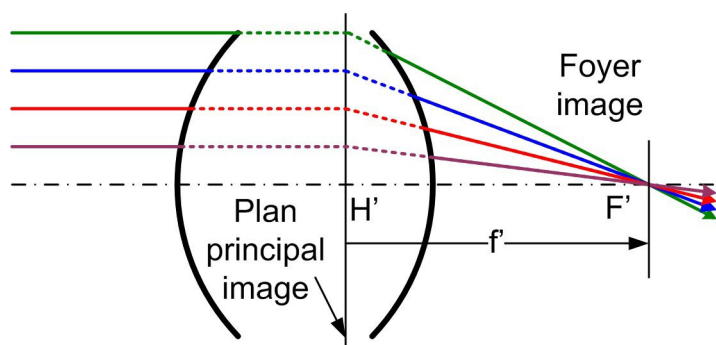


Figure 33

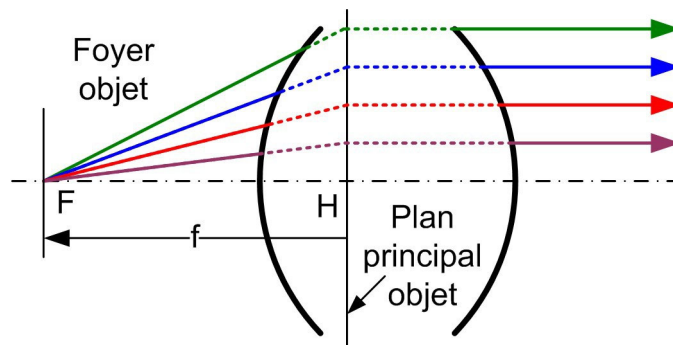


Figure 34

Suivant la figure 35, un rayon lumineux quelconque issu de F coupe le plan principal objet en I et ressort parallèle à l'axe, il coupe le plan principal image en I' . Un rayon incident parallèle à l'axe passant par I , passe aussi par I' puis converge en F' . Ces deux rayons se coupent en I dans l'espace objet puis en I' dans l'espace image. I et I' sont donc conjugués.

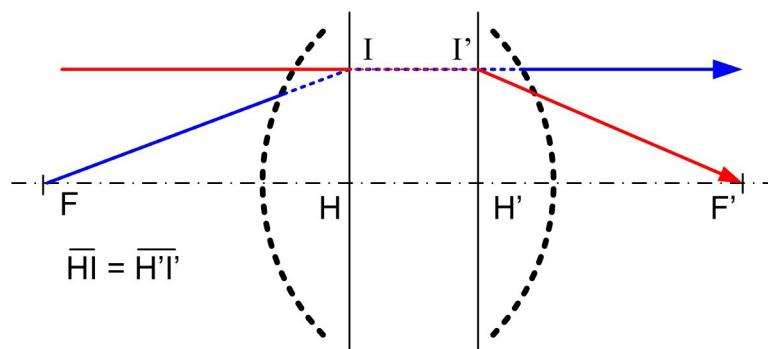


Figure 35

Les plans principaux sont conjugués avec un grandissement transversal associé égal à 1.

F , F' , H et H' sont les **points cardinaux** du système optique.

5.3. Construction des images

Considérons un système optique, ses foyers F et F' , ses points principaux H et H' , ses plans principaux P et P' , un objet AB de dimension y . Pour construire l'image B' de B faisons partir de B deux rayons lumineux.

Rayon 1 (Rouge): Parallèle à l'axe, coupe P en I . Le rayon image passe par I' (image de I) et F' (Incident parallèle à l'axe), nous avons :

$$\overline{HI} = \overline{H'I'} = y$$

Rayon 2 (Bleu) : Passe par F , coupe P en J . Le rayon image passe par J' (image de J) et sort parallèle à l'axe (Issu de F), nous avons :

$$\overline{HJ} = \overline{H'J'} = y'$$

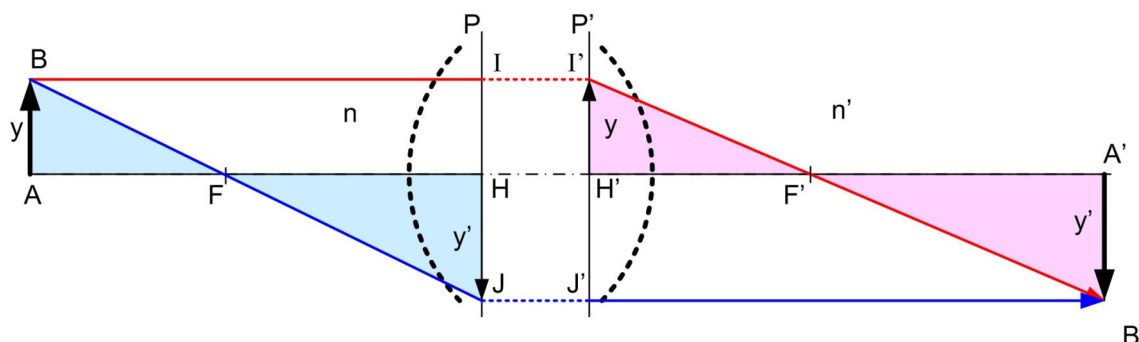


Figure 36

Ces rayons se recoupent en B' , image de B . Le stigmatisme paraxial entraîne que tout autre rayon issu de B traversant le système optique passe par B' .

B' est parfaitement défini par la position de l'objet B et la position des 4 points (H, H', F, F') .

Le système optique est parfaitement défini par les points cardinaux (H, H', F, F') .

Le point A' , image de A , est sur la perpendiculaire abaissée de B' sur l'axe.

5.4. Équation de conjugaison aux foyers

Sur la figure précédente, les triangles (FAB) et (FHJ) ainsi que $(F'H'I')$ et $(F'A'B')$ sont semblables, nous pouvons donc écrire, sachant que $\overline{HJ} = y'$ et $\overline{H'I'} = y$:

$$\frac{y'}{y} = \frac{\overline{FH}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'H'}}$$

On en déduit une relation de conjugaison aux foyers, dite de **Newton** :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = f \cdot f' \quad (21)$$

5.5. Convergence, relation entre f et f'

Le système optique est défini par (H, H', F, F') .

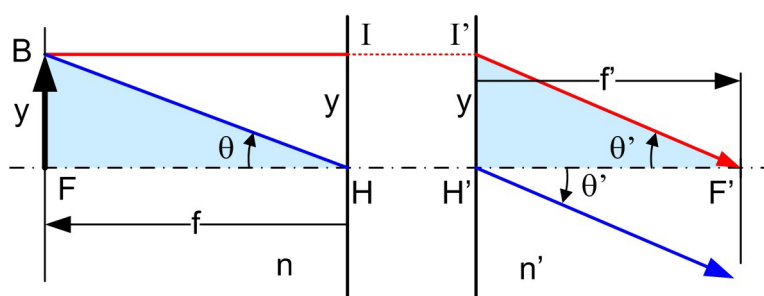


Figure 37

Considérons un point objet B situé dans le plan focal objet. Son image B' est à l'infini. Suivant la figure 37, le rayon BI parallèle à l'axe (rouge) a pour image $I'F'$ faisant l'angle θ' avec l'axe comme tous les rayons émergents puisque l'image B' est à l'infini.

Le rayon BH (bleu) a pour image un rayon issu de H' (image de H) et faisant l'angle θ' . La relation (20) appliquée à la conjugaison (HH') nous donne : $n\theta = n'\theta'$ ou $\theta = y/f$ et $\theta' = -y/f'$. On en déduit C_v étant la convergence du système :

$$C_v = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} \quad (22)$$

5.6. Équation de conjugaison de Descartes, grandissements

Les points principaux H et H' sont pris comme origine :

$$\overline{HA} = z$$

et

$$\overline{H'A'} = z'$$

d'où

$$\overline{FA} = z - f$$

et

$$\overline{F'A'} = z' - f'$$

En remplaçant dans (21), l'équation de conjugaison devient :

$$\frac{n'}{z'} = \frac{n}{z} + \frac{n'}{f'} = \frac{n}{z} + C_v \quad (23)$$

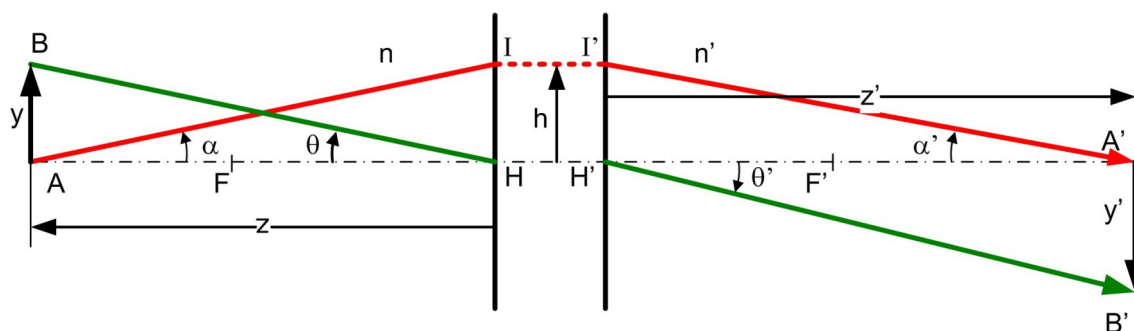


Figure 38

Suivant la figure 38, le rayon (vert) issu de B et passant par H fait un angle θ avec l'axe. Comme montré précédemment, son image partant de H' fait un angle θ' tel que $n\theta = n'\theta'$. Comme $\theta = y/z$ et $\theta' = y'/z'$, on en déduit le grandissement transversal g_y :

$$g_y = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{y'}{y} = \frac{nz'}{n'z} \quad (24)$$

avec (22) et (23) :

$$g_y = \frac{f}{f-z} = 1 - \frac{z'}{f'} \quad (25)$$

A une seule valeur de z (ou de z') correspond une seule valeur de g_y et réciproquement. Ces formules sont identiques à celles des dioptries. Pour un dioptre, les plans principaux sont confondus et situés sur la surface du dioptre.

Le même type de raisonnement conduit au grandissement angulaire g_α :

$$g_\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{z}{z'} \quad (26)$$

et au grandissement axial g_z :

$$g_z = \frac{dz'}{dz} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{z'^2}{z^2} \quad (27)$$

5.7. Points nodaux, points anti-principaux

Les points nodaux N et N' sont les points conjugués tels que $g_\alpha = 1$, on en déduit :

$$\overline{HN} = \overline{H'N'} = f + f'$$

Les points anti-principaux K et K' sont tels que $g_y = -1$, d'après (25) on en déduit :

$$\overline{HK} = 2f$$

et

$$\overline{H'K'} = 2f'$$

5.8. Dimension de l'image d'un objet non ponctuel à l'infini

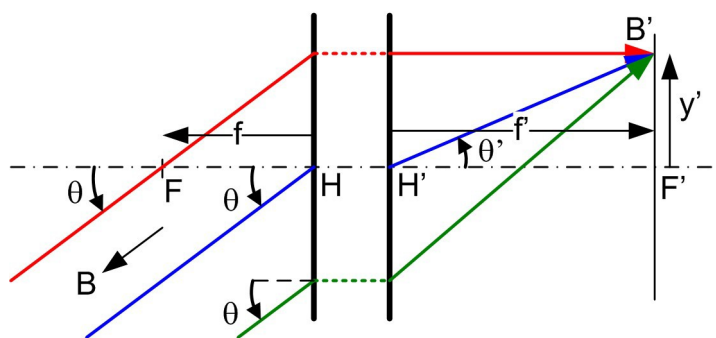


Figure 39

Un objet AB de dimension θ à l'infini a une image $F'B'$ dans le plan focal image dont la dimension est :

$$y' = -f \cdot \theta \quad (28)$$

Comme $n\theta = n'\theta'$ nous avons aussi : $y' = f' \theta' = nf'\theta/n'$

5.9. Systèmes optiques réfractifs dans l'air

Ils composent la majorité des systèmes optiques existants (lentilles, objectifs, oculaires...). Les formules se simplifient :

Dans l'air, $n = n' = 1$

- Convergence :

$$Cv = 1/f' = -1/f \text{ et } f' = -f \quad (29)$$

- Équation de conjugaison de Newton :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 \quad (30)$$

- Équation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{z} + \frac{1}{f'} \quad (31)$$

- Grandissements :

$$g_y = \frac{z'}{z} \quad g_\alpha = \frac{z}{z'} \quad g_z = g_y^2 = \frac{z'^2}{z^2} \quad (32)$$

- N et N' sont respectivement confondus avec H et H'

6. Association de systèmes

6.1. Association de deux systèmes optiques

Soit un système optique S formé de deux sous-systèmes $S_1(F_1F'_1H_1H'_1)$ et $S_2(F_2F'_2H_2H'_2)$ de distance focale f'_1 et f'_2 . Cherchons les propriétés optiques de S .

L'indice d'entrée est n , l'indice intermédiaire N , l'indice de sortie n' .

Un objet AB à l'infini de dimension angulaire θ donne, dans le plan focal image $F'_1B'_1$ de S_1 , une image de dimension $y'_1 = -f'_1 \cdot \theta$ suivant (28). Le système S_2 en redonne une image définitive $F'B'$ dans le plan focal image de S dont la dimension y' peut s'exprimer par :

Le grandissement g_{y2} de la conjugaison $F'_1 \rightarrow F'$:

$$y' = y'_1 \cdot g_{y2} = -f'_1 \cdot \theta \cdot g_{y2}$$

La relation (28) appliquée à S, f étant la distance focale objet de S :

$$y' = -f \cdot \theta$$

On en déduit la distance focale objet de S :

$$f = f'_1 \cdot g_{y2} \quad (33)$$

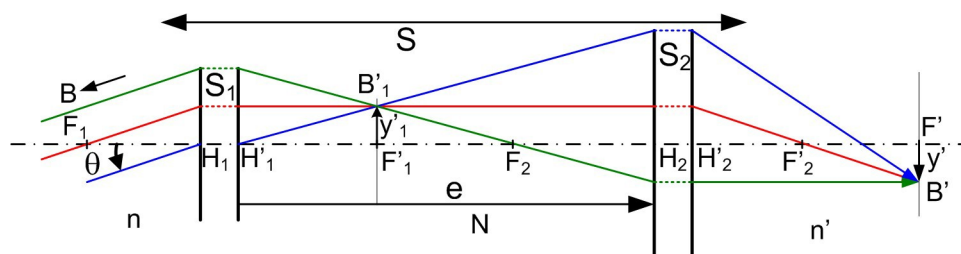


Figure 40

La formule de Gullstrand donne une relation simple entre les convergences C_v , C_{v1} , C_{v2} de S , S_1 , S_2 , la distance $\overline{H'_1H_2} = e$ et l'indice intermédiaire N :

$$C_v = C_{v1} + C_{v2} - e \cdot C_{v1} \cdot C_{v2} / N \quad (34)$$

7. Lentilles

Elles sont composées d'un milieu transparent d'indice n compris entre deux dioptries de rayon R_1 et R_2 . L'axe de la lentille passe par les centres de courbures des faces. Cet axe coupe les dioptries en leurs sommets S_1 et S_2 . $e = S_1S_2$ est l'épaisseur au sommet de la lentille.

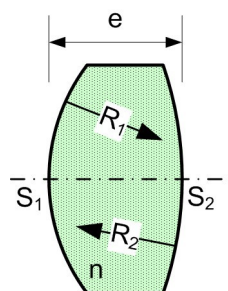


Figure 41

Les convergences des dioptres sont respectivement :

$$Cv_1 = (n-1)/R_1 \text{ et } Cv_2 = (1-n)/R_2$$

La lentille est dans l'air, suivant (29) la convergence Cv de la lentille est :

$$Cv = 1/f' = -1/f.$$

Pour certains types de lentilles (lentilles ophtalmiques, ...), Cv s'exprime en dioptries notées δ ($1.\delta = 1.m^{-1}$).

La formule de Gullstrand (34) donne la convergence Cv de la lentille comme association des deux dioptres.

On obtient :

$$\frac{1}{f'} = Cv = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{e \cdot (n-1)^2}{R_1 R_2} \quad (35)$$

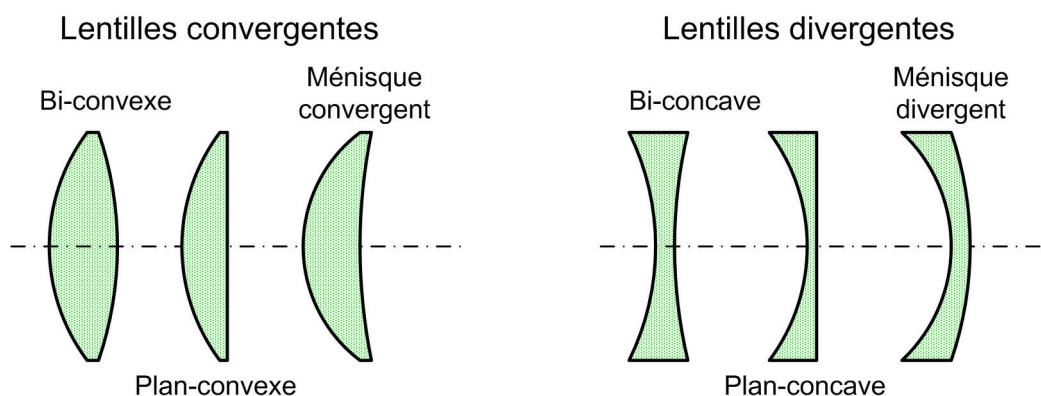


Figure 42

Les lentilles convergentes sont plus épaisses au centre qu'au bord, à l'inverse les lentilles divergentes sont plus épaisses au bord.

7.1. Lentilles minces

La lentille est considérée comme mince si e est petit par rapport à R_1 et R_2 . Le terme $e \cdot (n-1)^2$

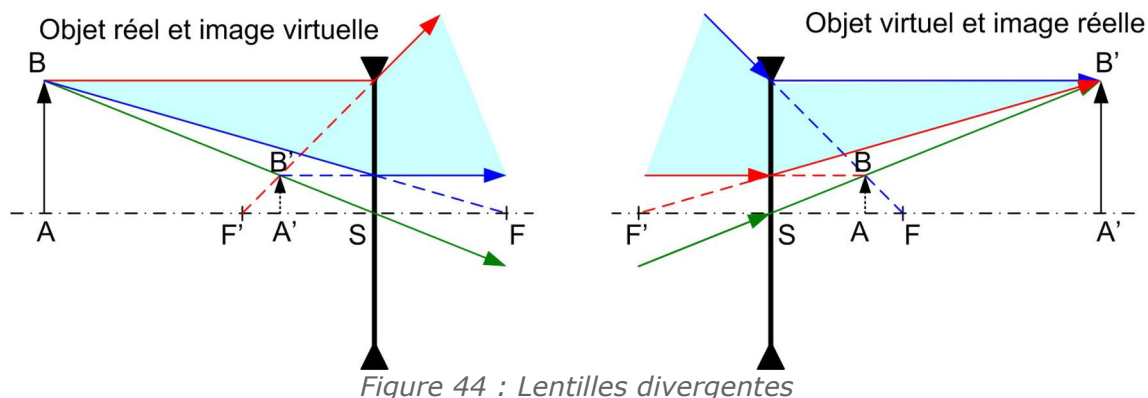
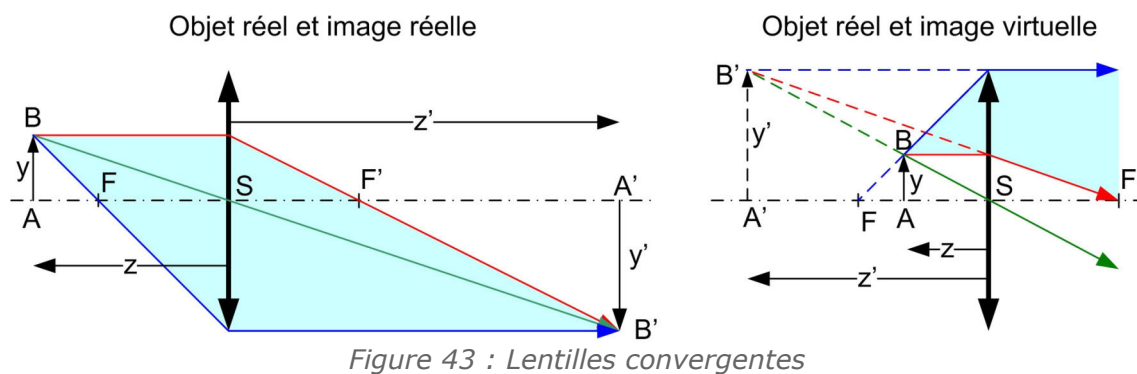
$R_1 R_2$ est négligeable et la distance focale f' est telle que :

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (36)$$

Caractéristiques particulières des lentilles minces :

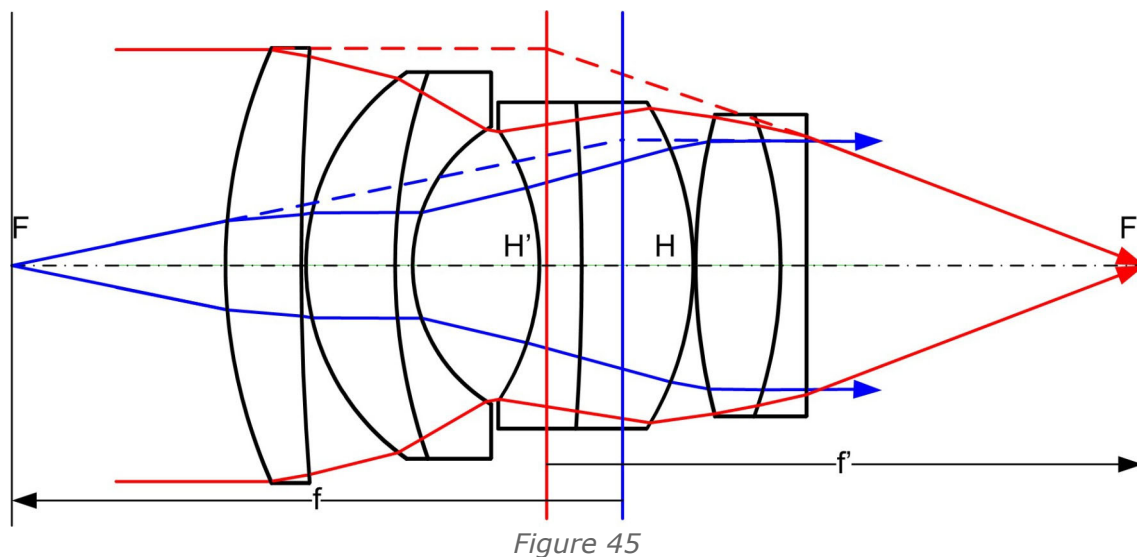
Rayon issu de B (Rayon objet)	Rayon réfracté allant en B' (Rayon image)	Couleur
Parallèle à l'axe	Passé par F'	Rouge
Passé par F	Parallèle à l'axe	Bleu
Passé par S	N'est pas dévié	Vert

Tableau1 : Construction des images



7.2. Simulation d'un système optique complexe par une lentille mince

L'exemple de la figure 45 montre un objectif de prise de vue à 7 lentilles avec les positions des foyers et des plans principaux.



H, H', F et F' suffisent pour définir parfaitement le système dans l'approximation paraxiale.

La translation de l'ensemble de l'espace image par le vecteur $\overrightarrow{H'H}$ ne modifiant pas les formules de conjugaison par rapport à H et H' , ainsi que les grandissements, cet objectif complexe peut parfaitement être simulé par une lentille mince située sur H et H' et de même distance focale.

La plupart des systèmes optiques complexes dans l'air, formés de lentilles épaisses ou de sous-ensembles optiques multi-lentilles peuvent ainsi être étudiés en simulant ces éléments par des lentilles minces.

7.3. Associations de lentilles minces

Chaque lentille i est caractérisée par sa position et sa convergence $C_{v_i} = 1/f'_i$.

Pour déterminer la convergence $C_v = 1/f'$ de l'association de deux lentilles on applique la formule de Gullstrand (34) avec $N = 1$:

- Cas de deux lentilles à distance e : $C_v = C_{v_1} + C_{v_2} - e \cdot C_{v_1} \cdot C_{v_2}$ soit

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 \cdot f'_2}$$

on en déduit :

$$f' = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} \quad (37)$$

- Cas de deux lentilles (C_{v_1} et C_{v_2}) accolées : $e = 0$ d'où $C_v = C_{v_1} + C_{v_2}$

8. Systèmes afocaux, grossissement

8.1. Systèmes afocaux, grossissement

Dans la formule (37), nous remarquons que dans le cas où la distance e entre deux lentilles est égale à $f'_1 + f'_2$, f' est infini, C_v est nul. Le point à l'infini est image de lui-même. Le système n'a pas de foyers. Le foyer image de la première lentille est confondu avec le foyer objet de la deuxième.

Dans le cas d'un système complexe S dans l'air composé de deux sous-systèmes, dès que le foyer image du premier est confondu avec le foyer objet du deuxième, le système est afocal.

C'est le cas de systèmes d'observation visuelle tels que lunettes, jumelles, télescopes.

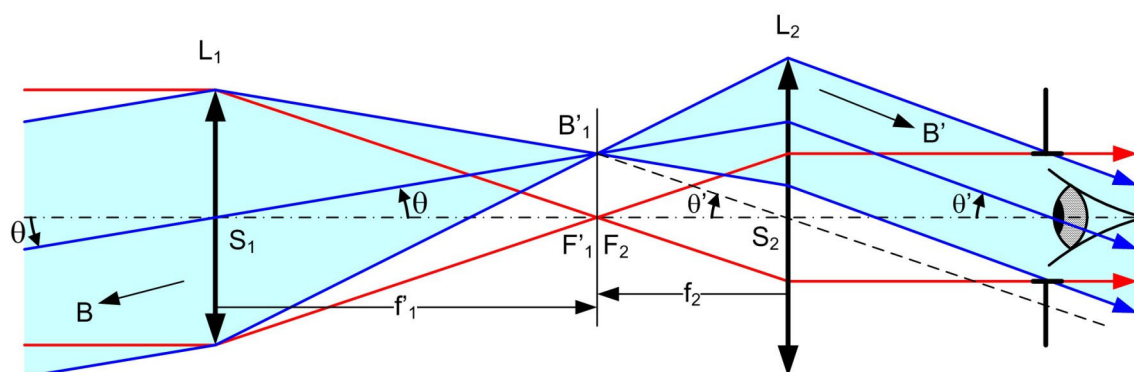


Figure 46

La figure ci-dessus montre un tel système composé de deux sous-systèmes qui sont assimilés à des lentilles minces L_1 et L_2 . L'objet B est à l'infini dans la direction θ . Les principales propriétés de ces systèmes afocaux sont :

- F'_1 confondu avec F_2
- Le point objet à l'infini sur l'axe est image de lui-même

- Le grandissement transversal est constant : $g_y = \frac{y'}{y} = -\frac{f'_2}{f'_1}$

$$G = g_{\theta} = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

- Le grossissement angulaire ou **grossissement** G est constant :

Une lunette astronomique est un instrument afocal composé d'un système de tête appelé objectif qui donne une image intermédiaire. Celle-ci est observée avec un oculaire qui donne de l'image intermédiaire une image observable à l'oeil située à l'infini. Le grossissement est négatif, les images sont inversées.

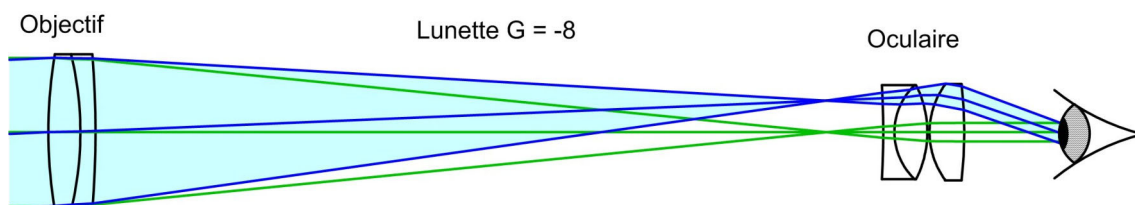


Figure 47

Les instruments afocaux visuels terrestres (lunettes, jumelles) disposent entre l'objectif et l'oculaire d'un redresseur, généralement à prismes, qui permet de donner un grossissement positif.

Dans un corps de jumelles un ensemble de deux prismes de « Porro » permet une rotation de 180° de l'image autour de l'axe optique et redresse ainsi les images.

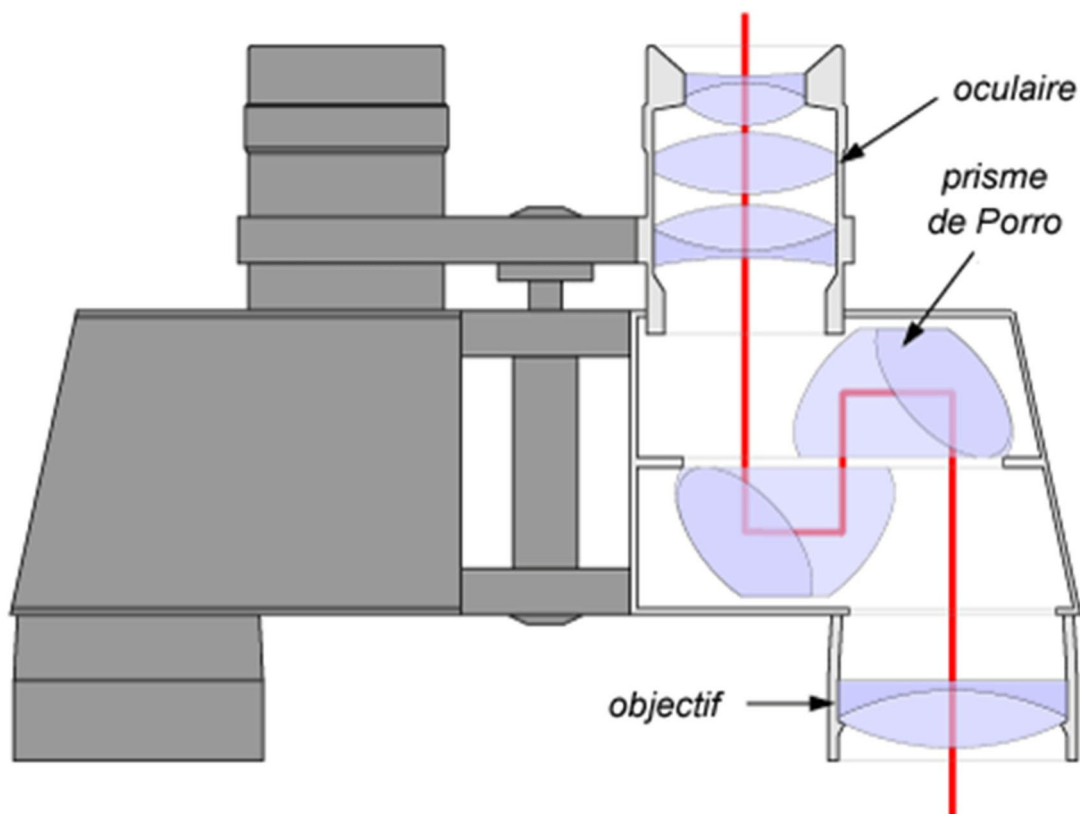


Figure 48

Lunette de Galilée : Elle est caractérisée par un deuxième système divergent, le grossissement est alors positif, les images sont droites mais le champ est très réduit. On les utilise avec des grossissements faibles comme dans les jumelles de théâtre.

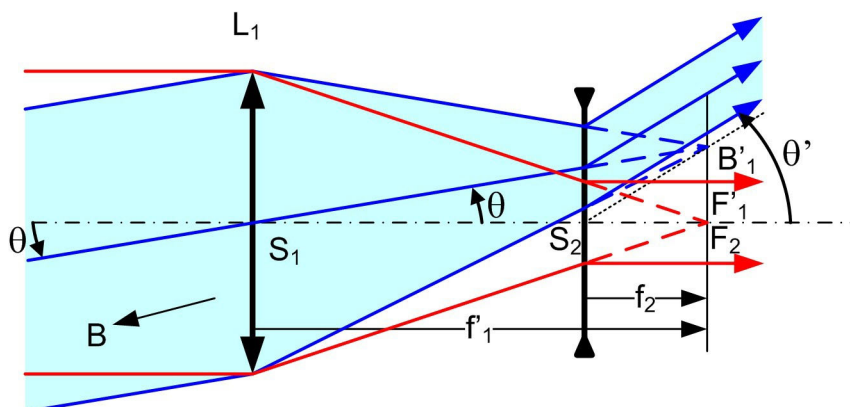


Figure 49

8.2. Grossissement des systèmes optique focaux visuels (Loupes, oculaires, microscopes...)

Ces systèmes optiques sont utilisés pour permettre à un observateur d'obtenir, d'un objet à distance finie, une image à grande distance, visible à l'œil sans accommodation.

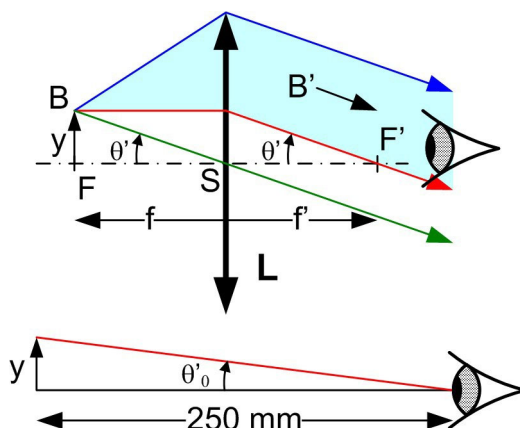


Figure 50 & Figure 51

En admettant que l'on assimile un tel système à une lentille mince L , la figure 50 représente un objet FB de dimension y dans le plan focal objet de L . L'image B' de B est à l'infini dans la direction $\theta' = y/f = -y/f'$.

Le grossissement G_c dit « commercial » de ces systèmes est le rapport entre θ' et θ_0 , angle sous lequel on voit directement à l'œil le même objet à une distance de 250mm , d'où :

$$G_c = \frac{\theta'}{\theta_0} \text{ on en déduit } G_c = \frac{250}{f'} f' \text{ étant exprimée en mm}$$

Une loupe de grossissement 5 a une distance focale de 50mm . Un oculaire de grossissement 20 a une distance focale de $12,5\text{mm}$

9. Diaphragmes, pupilles et champs

Un système optique est géométriquement limité transversalement par les montures des lentilles ou des miroirs et divers autres diaphragmes mécaniques.

Pour une conjugaison donnée, **la pupille** est le diaphragme qui limite le rayonnement lumineux provenant de l'objet. Ce diaphragme est généralement situé à l'intérieur du système optique. On définit la pupille de sortie du système par l'image de la pupille de ce diaphragme à travers les lentilles (ou miroirs) qui la suivent. Elle-même image de la pupille d'entrée à travers les lentilles (ou miroirs) qui la précèdent.

La pupille de sortie est image de la pupille d'entrée dans le système optique. Le **champ objet** (resp image) est la dimension latérale maximale de l'objet (resp image).

Quand l'objet (resp image) est à l'infini le champ objet (resp image) s'exprime angulairement. Le champ est généralement limité par un diaphragme spécial dit « **diaphragme de champ** ».

Le **champ de pleine lumière** objet (resp image) est défini par l'ensemble des points de l'objet (resp image) pour lesquels les rayons lumineux traversant le système ne sont limités que par le diaphragme d'ouverture (D.O), ceci procure au champ de pleine lumière image un éclairage quasi uniforme. Au-delà du champ de pleine lumière les diaphragmations provoquées par les montures des lentilles diminuent notablement l'éclairage de l'image. Cette diminution de l'éclairage au bord du champ est appelée **vignettage**.

9.1. Quelques exemples

Exemple : 1 :

On considère un objectif de prise de vue à 6 lentilles, l'objet est à l'infini. Un iris placé au centre de l'objectif sert de diaphragme d'ouverture au système. Les pupilles d'entrée et de sortie sont virtuelles.

Les points du champ de pleine lumière sont éclairés par des faisceaux uniquement limités par le D.O. La figure 52 montre le bord du champ de pleine lumière image, pour un point au-delà, le faisceau de lumière sera limité, en partie, par les montures des lentilles.

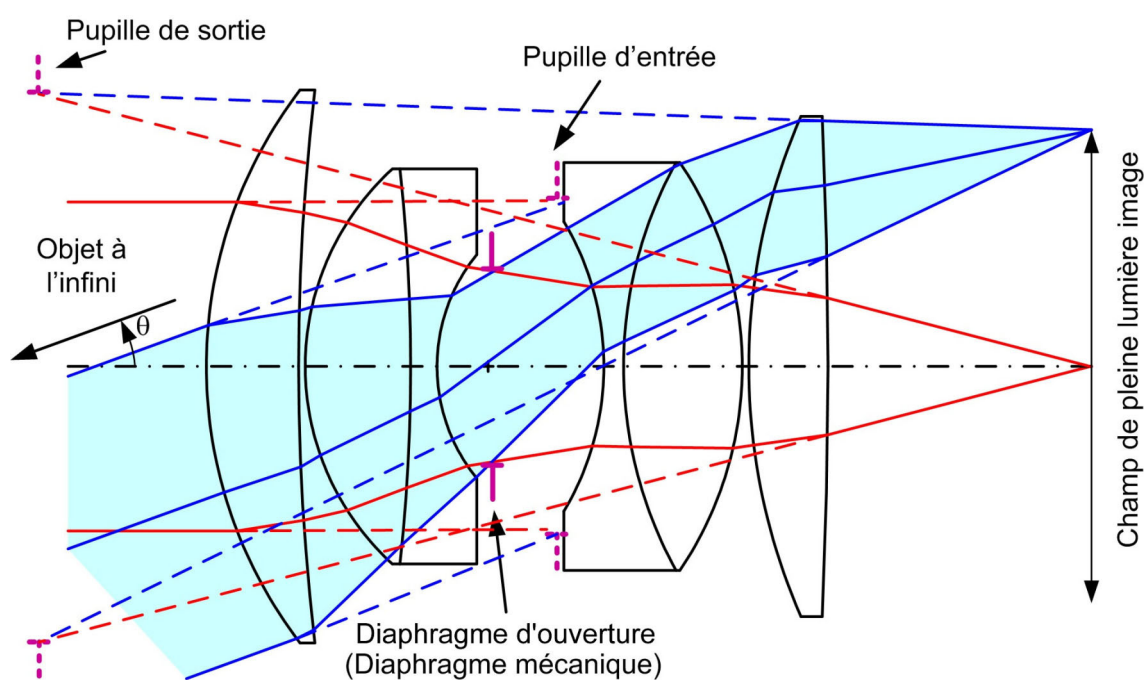


Figure 52

Exemple : 2 :

Lunette astronomique, l'objet est à l'infini, l'objectif de la lunette effectue la limitation des rayons, il est D.O et pupille d'entrée, son image dans l'oculaire est la pupille de sortie qui est l'endroit où doit se situer la pupille de l'œil de l'observateur. Les pupilles d'entrée et de sortie sont réelles.

Un diaphragme situé dans le plan focal objet de l'oculaire effectue la limitation du champ. Le champ de pleine lumière image est à l'infini, il est confondu avec l'image à l'infini du diaphragme de champ de l'oculaire

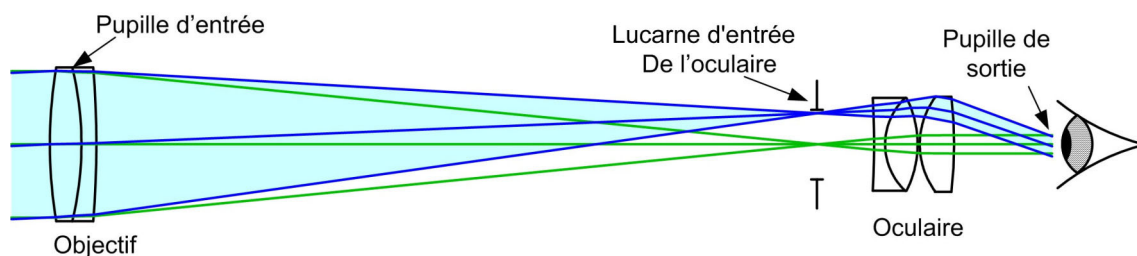


Figure 53

Lucarne : conjugué objet ou image du diaphragme de champ

Dans un système optique à deux diaphragmes prépondérants (on suppose que les autres diaphragmations ne jouent pas), le calcul du champ de pleine lumière s'effectue de la manière suivante :

- Les diaphragmes sont ramenés dans le même espace, espace image, par exemple.
- La pupille est le conjugué objet ou image du D.O vu sous le plus petit angle depuis le centre du champ image (point *A*).
- La lucarne est le conjugué objet ou image du diaphragme de champ
- Le bord du champ de pleine lumière (point *B*) s'obtient en cherchant l'intersection avec le plan image, la plus proche du centre du champ, du rayon joignant le bord de la pupille et le bord de la lucarne (dans le même espace : objet, image ou intermédiaire).

Pour un point hors du champ de pleine lumière (point *C*, par exemple), les rayons issus de la pupille convergents en *C* sont en partie obturés par la lucarne, la diaphragmation est en « œil de chat ».

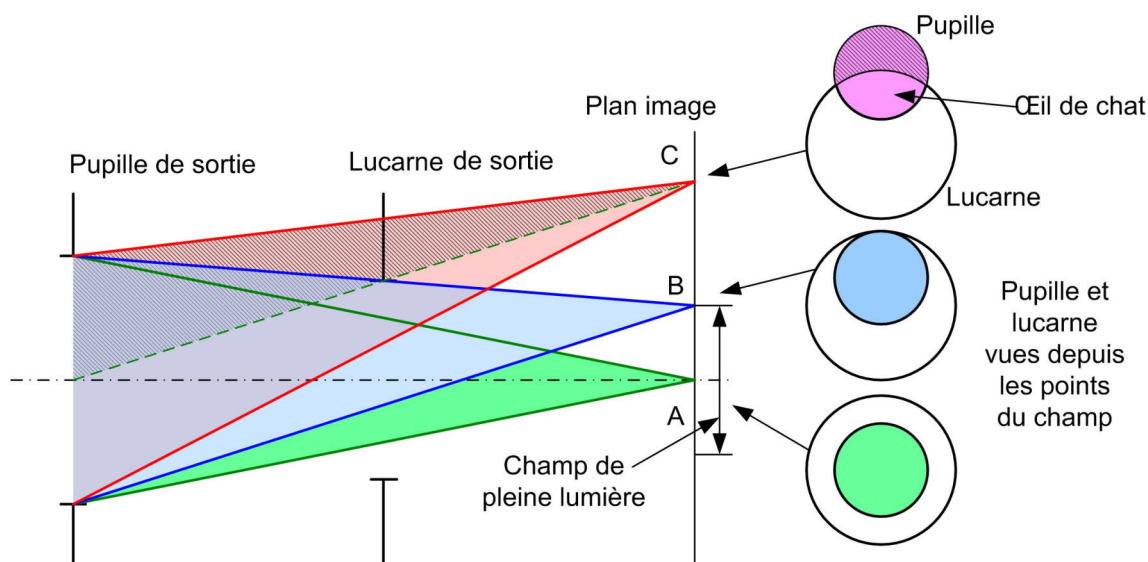


Figure 54

III. Etude de cas : Calcul des caractéristiques optiques d'un système à 2 lentilles

Un système optique S est composé d'un premier système optique convergent assimilable à une lentille mince convergente L_1 de distance focale $f'_1 = -40\text{mm}$, et de diamètre 40 mm puis d'un deuxième système optique assimilable à une lentille mince divergente L_2 de distance focale $f'_2 = -30\text{mm}$ et de diamètre 30 mm. Les lentilles L_1 et L_2 sont distantes de 20 mm.

$$\overline{S_1 F'_1} = f'_1 = -40\text{mm} \quad \text{et} \quad \overline{S_2 F'_2} = f'_2 = -30\text{mm} .$$

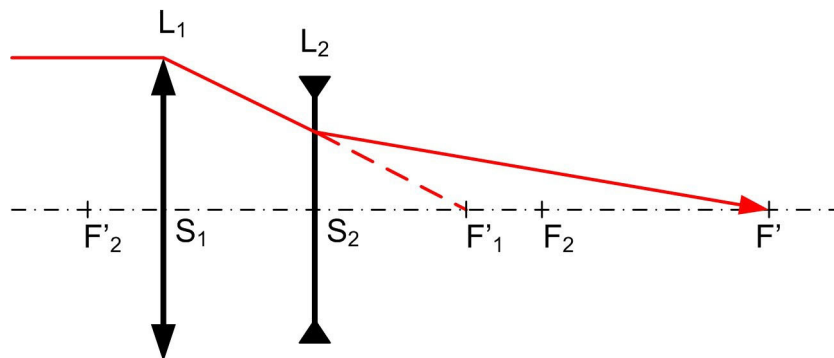


Figure EC 1

1. Détermination de la position du foyer image F' de S

F' est l'image dans le système du point à l'infini sur l'axe.

L'objet étant à l'infini sur l'axe, L_1 en donne une image en son foyer image F'_1 .

L_2 donne de F'_1 une image définitive qui est le foyer image F' de S.

F' est le conjugué de F'_1 dans la lentille L_2 .

Pour déterminer la position de F' appliquons la formule de conjugaison (31) $\frac{1}{z'} = \frac{1}{z} + \frac{1}{f'}$

$$\text{Soit pour la conjugaison considérée : } \frac{1}{\overline{S_2 F'}} = \frac{1}{\overline{S_2 F'_1}} + \frac{1}{f'_2} = \frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{60} \Rightarrow \overline{S_2 F'} = 60\text{mm}$$

2. Détermination de la position de H'

Nous savons que $f' = \overline{H' F'}$, f' permet le calcul de la position de H'

Calcul de f' :

Méthode : 1

Le grandissement de la conjugaison $F'_1 \Rightarrow F'$ dans L_2 est $z'/z = 3$

La formule (33) nous donne $f' = 3f_1$ et donc $f' = 3f'_1 = 120\text{mm}$

Méthode : 2

$$1/f' = Cv = 1/f'_1 + 1/f'_2 - S_1S_2/f'_1/f'_2 = 1/40 - 1/30 + 20/(20 * 30) = 1/120$$

math : Application de la formule de Gullstrand (34)

3. Détermination de la position du foyer objet F de S

On opère de la même façon par retour inverse de la lumière, F est l'image de F_2 dans L_1 par retour inverse, ou F_2 l'image de F par trajet direct, l'équation s'écrit :

$$\frac{1}{S_1F_2} = \frac{1}{S_1F} + \frac{1}{f'_1} \Rightarrow \frac{1}{S_1F} = \frac{1}{S_1F_2} - \frac{1}{f'_1} = \frac{1}{50} - \frac{1}{40} = -\frac{1}{200} \Rightarrow \overline{S_1F} = -200mm$$

H est tel que $\overline{FH} = -f = f' = 120mm$

La figure EC 2 montre le schéma du système et les points cardinaux.

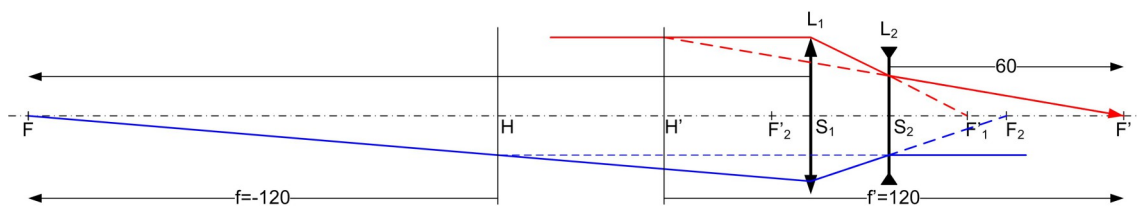


Figure EC 2

4. Calcul du champ de pleine lumière

La figure EC 2 montre que L_1 est pupille et L_2 lucarne car le rayon extrême pour un point sur l'axe passe par le bord de L_1 . La figure EC 3 montre un faisceau de rayons arrivant au bord du champ de pleine lumière.

Le rayon extrême du faisceau passe par le bord de la pupille et le bord de la lucarne. Il coupe le champ intermédiaire situé dans le plan focal de L_1 à $10mm$ de l'axe.

Le grandissement de la conjugaison $F'_1 \rightarrow F'$ de L_2 étant 3, le bord du champ de pleine lumière est à $30mm$ de l'axe. La dimension totale du champ de pleine lumière est donc $60mm$.

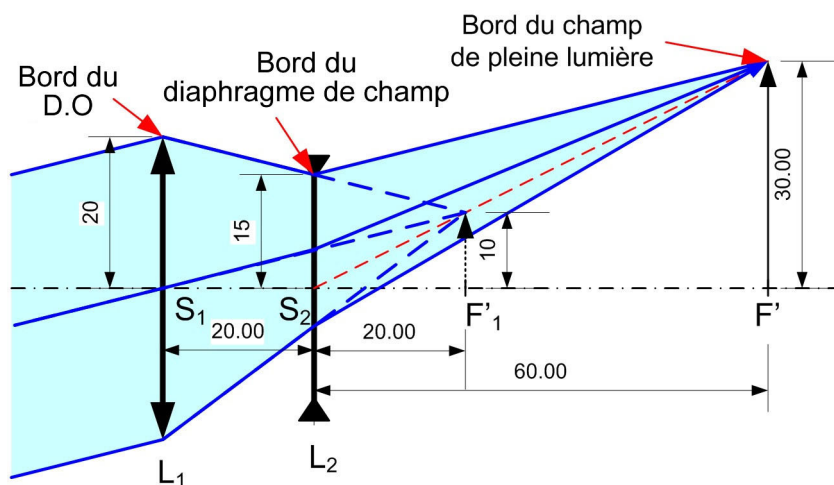


Figure EC 3

IV. Exercices

1. Exercice 1

Un télescope possède un miroir concave de rayon de courbure 2000mm .

Question 1

[Solution n°1 p 40]

A quelle distance du sommet du miroir est située l'image d'une étoile ?

Question 2

[Solution n°2 p 40]

Quelle est la dimension de l'image de la lune dont le diamètre apparent est de 30 minutes d'arc ?

2. Exercice 2

On utilise une loupe de grossissement commercial G_c égal à 5 pour faire l'image agrandie d'un objet lumineux sur un écran. La loupe est assimilée à une lentille mince. La distance de l'objet à l'écran est 360mm .

$$G_c = \frac{P}{4} \Rightarrow P = 4 - G_c$$

et

$$P = 1/f'$$

Question

[Solution n°3 p 40]

Quelle est la distance de l'image à la lentille ? Quel est le grandissement de la conjugaison ? Quel est le sens de l'image par rapport à l'objet ?

3. Exercice 3

Un oculaire de Huygens possède deux lentilles L_1 (objectif) et L_2 (oculaire) supposées minces de distances focales respectives $f'_1 = 30\text{mm}$ et $f'_2 = 10\text{mm}$. La distance entre les deux lentilles est $S_1S_2 = 20\text{mm}$.

Question

[Solution n°4 p 40]

Déterminer la distance focale de l'oculaire et positionner ses points cardinaux.

Solution des exercices

>Solution n°1 (exercice p. 39)

Le miroir a un rayon de courbure de 2000mm sa distance focale f' est 1000mm . L'image d'une étoile est à 1000mm du sommet du miroir.

>Solution n°2 (exercice p. 39)

La lune a un diamètre apparent de 30 minutes d'arc soit

$$\theta = \frac{30 \times \pi}{180 \times 60} \text{RAD} = 8,7 \cdot 10^{-3} \text{RAD}$$

La dimension de l'image dans le plan focal est

$$y' = f' \cdot \theta = 8,7 \cdot 10^{-3} \times 1000 = 8,7 \text{mm}$$

>Solution n°3 (exercice p. 39)

Une loupe de grossissement commercial 5 a une distance focale f' de $250/5 = 50\text{mm}$. La lentille est convergente. L'objet et l'image sont réels et de part et d'autre de la lentille. z (objet) est négatif et z' (image) positif. Nous pouvons écrire le système de deux équations à 2 inconnues :

Relation de conjugaison

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{z} + \frac{1}{f'}$$

math : Relation de conjugaison (33)

$$z' - z = 360$$

math : Distance objet-image

Après simplification nous obtenons l'équation du 2^{ème} degré en z' :

$$z'^2 - 360z' + 18000 = 0$$

Les racines sont 60 et 300

Pour $z' = 60$, $z = -300$ et $gy = z'/z = -1/5$ l'image est plus petite

Pour $z' = 300$, $z = 60$ et $gy = -5$ l'image est plus grande. C'est la solution.

Un grandissement négatif signifie que **l'image est inversée par rapport à l'objet**.

>Solution n°4 (exercice p. 39)

La distance focale de l'oculaire est donnée par la formule de Gullstrand (34) :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{e}{f_1' \cdot f_2'} = \frac{1}{30} + \frac{1}{10} - \frac{20}{30 * 10} = \frac{1}{15}$$
$$f' = 15\text{mm}$$

Le foyer image de l'oculaire (côté œil) est l'image du foyer image $F'1$ de la lentille $L1$ dans $L2$.

L'équation de conjugaison

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{z} + \frac{1}{f'}$$

s'écrit

$$\frac{1}{S_2 F'} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

F' est à 5mm de $L2$

Position de H' :

H' est au milieu du segment S_1S_2

Par retour inverse de la lumière nous obtenons :

$\overline{S_1F} = 15\text{mm}$ et $\overline{S_1H} = 30\text{mm}$