

Filtrage d'images : Fondamentaux

SILVIO MONTRESOR

Table des matières

I. Présentation	3
II. Cours	4
1. Acquisition, représentation et filtrage des images.....	4
2. Signaux bidimensionnels.....	6
3. Analyse fréquentielle des images.....	10
4. Filtrage spatial.....	12
5. Echantillonnage et quantification.....	14
6. Systèmes bidimensionnels discrets.....	17
6.1. <i>Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF):</i>	18
6.2. <i>Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII):</i>	18
6.3. <i>Exemples de filtres RIF:</i>	19
III. Etude de cas	22
1. Représentation et Filtrage d'images.....	22
1.1. <i>Les formats d'images dans Matlab:</i>	22
1.2. <i>Manipulations:</i>	23
2. Corrigé des manipulations.....	23
2.1. <i>Corrigé des manipulations:</i>	23
IV. Exercices	29
1. Exercices sur le filtrage d'image.....	29
1.1. <i>Exercices sur le filtrage d'image:</i>	29
Solution des exercices	30
Bibliographie	32

I.Présentation

Module :

Imagerie

Auteur(s) :

Silvio MONTRESOR - Le Mans Université - Laboratoire d'acoustique (UMR CNRS 6613)

Résumé :

Attributs d'une image. Signaux et systèmes bidimensionnels discrets. Filtrage spatial. Échantillonnage et quantification. Filtres numériques d'images.

Mots-clés :

Image, Filtrage numérique, Transformée de Fourier 2d, Quantification, Echantillonnage

Pré-requis :

Traitement numérique du signal

Objectif(s) pédagogique(s) :

Acquérir les bases du filtrage numérique des images

Plan du cours :

- Introduction
- Acquisition, représentation et filtrage des images
- Signaux bidimensionnels
- Analyse fréquentielle des images
- Filtrage spatial
- Échantillonnage et quantification
- Systèmes bidimensionnels discrets
- Conclusion

Conception & production :

PRN - Le Mans Université

Licence :

Licence GNU¹

1 - <http://www.gnu.org/licenses/fdl.txt>

II. Cours

Ce grain aborde les notions de base relatives au traitement des images, c'est à dire les aspects qui touchent à la représentation et à l'analyse des images. Ces différents aspects apparaissent dans le schéma bloc de la figure 1 qui constituera le fil rouge de notre exposé.

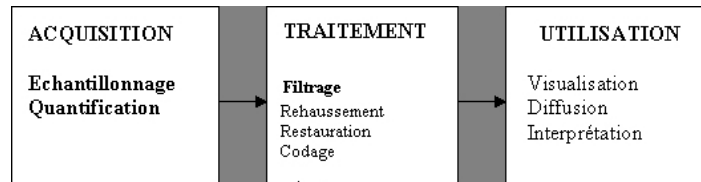


Figure 1: Diagramme général de la chaîne de traitement d'une image.

Hormis l'introduction le cours est découpé en cinq parties qui représentent les deux premiers blocs du diagramme précédent. La partie utilisation quand à elle comprend notamment les traitements de hauts niveaux comme la détection de contour et n'est pas abordée dans ce grain.

En ce qui concerne la partie acquisition et avant toute chose, une présentation est faite des diverses représentations d'une image considérée comme un signal bidimensionnel. Quelques exemples de signaux bidimensionnels de base ainsi que leur notation sont abordés. Que ce soit pour les traitements bas niveaux où les traitements évolués, la notion liée à la représentation fréquentielle des images occupe une place particulièrement importante aussi, dans une seconde partie sont abordées les propriétés de la Transformée de Fourier en deux dimensions. Dans une troisième partie et à partir propriétés de la TF sont présentés les éléments concernant le filtrage des images qui intervient pratiquement dans les toutes les techniques de traitement bas niveaux, appelées aussi prétraitement, des images. Le problème de l'échantillonnage et de la quantification des images est présenté dans la quatrième partie. Enfin, le filtrage numérique des images constitue la dernière partie du cours.

1. Acquisition, représentation et filtrage des images

Nous recensons d'abord les différents types d'images que nous pourrions être amené à traiter. Pour pouvoir être analysée par un système informatique une image doit être représentée par un ensemble discret de valeurs, les pixels. Chaque pixel est associé à une ou plusieurs valeurs selon le choix de la représentation adoptée.

La représentation la plus élémentaire correspond à l'image *binnaire* pour laquelle chaque pixel ne peut prendre qu'une valeur parmi deux. Pour les images monochromes, chaque pixel peut prendre une valeur parmi N . N correspond généralement à une puissance de 2, ce qui facilite la représentation de l'image en machine. Par exemple, pour une image en niveau de gris chacun des pixels peut prendre une valeur parmi 256. Sa valeur est alors codée par un octet de donnée. Cette représentation est fréquemment utilisée et trouve une justification qui prend en compte les spécificités du système visuel humain ainsi que les caractéristiques physiques du support de l'image. Ce point est précisé dans la **partie Echantillonnage et Quantification**.

Les images *trichromes* (ou images couleur) correspondent à la superposition des trois images niveaux de gris correspondant aux couleurs de base. Pour les images destinées à être visualisées sur un écran d'ordinateur, on utilise la représentation RVB (rouge, vert, bleue) dite RGB en anglais. Chacun des pixels d'une image trichrome est ainsi associée à un triplet de valeurs correspondant au codage de la luminance des couleurs de base.

Cette représentation n'est pas la seule permettant le traitement d'images couleurs par un système informatique. Une alternative est constituée par les images dites indexées pour lesquelles on associe une matrice de point à une table de couleur (colormap). Dans cette

représentation, chaque pixel représente une valeur correspondant à un index qui pointe dans la table des couleurs. La table des couleurs est un tableau à trois colonnes associées aux couleurs de bases. Le nombre de ligne du tableau correspond au nombre total de couleurs retenues pour la représentation. La représentation indexée est plus économique en terme d'occupation mémoire que la représentation RGB puisqu'on restreint volontairement le nombre de couleur. De ce fait elle est également moins précise en terme de définition d'image.

Les images obtenues à partir de clichés dans le domaine visible ne sont pas les seules à se prêter à des applications, on parle alors d'images multi-spectrales qui constituent la généralisation du cas précédent. Elles sont représentées par n tableaux de nombres

Terminons cette partie maintenant par quelques données quantitatives liées à la représentation des images en machine. Une image est constituée par une matrice N lignes et M colonnes de pixels chacun codé par x bits.

1 bit	2 couleurs (noir & blanc)
4 bits	16 couleurs
8 bits	256 couleurs ou niveaux de gris
16 bits	65536 couleurs
24 bits	16777216 couleurs (vraies couleurs)
32 bits	4 294 967 296 couleurs

A titre d'exemple considérons maintenant une image trichrome 512x512 où chaque couleur est codée sur 8 bits. On obtient ainsi environ 786 Ko de données nécessaires pour stocker cette image. La figure 2 représente une image correspondant à la représentation trichrome précédente. La figure 3 représente la même image dans un format correspondant à l'application de l'algorithme JPEG sur l'image initiale 2a. L'image 2b occupe un espace de 15 Ko de données.

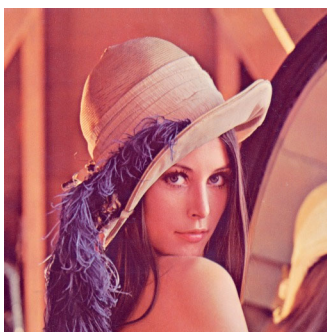


Figure 2 : Image "lena" trichrome RGB.



Figure 3 : Image "lena" obtenue après compression JPEG.

Cet exemple illustre les progrès considérables réalisés dans le domaine de la représentation numériques des images durant les quinze dernières années. Ces perfectionnements ont été portés vers le domaine de la vidéo et conduisent aujourd'hui à des normes de codages, mpeg2

et mpeg4 pour les plus répandues, utilisées aujourd'hui massivement dans la diffusion de contenus télévisés numériques.

2. Signaux bidimensionnels

On s'intéresse d'abord au cas des représentations continues. Une image peut être représentée par une fonction $f(x, y)$ qui associe une intensité lumineuse à un point du plan (x, y) . Afin d'étudier les propriétés des systèmes de traitement d'images on utilise des signaux bidimensionnels élémentaires dont on définit ici les caractéristiques. En premier lieu, l'impulsion de Dirac bidimensionnelle. Il s'agit en fait d'une distribution qui est l'extension du cas monodimensionnel.

$$\delta(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\delta(x, y) = +\infty \quad \text{pour } (x, y) = (0, 0)$$

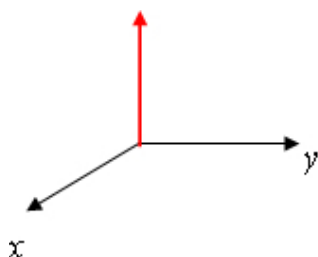


Figure 1-1 : Représentation de l'impulsion de Dirac bidimensionnelle

Toute image $f(x, y)$ peut être définie à partir d'une fonctionnelle à deux dimensions dont le noyau fait intervenir l'impulsion de Dirac :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x', y - y') \delta(x', y') dx' dy' = f(x, y) \quad (1-2)$$

A partir de l'impulsion bidimensionnelle, on construit également le peigne bidimensionnel qui constitue le recouvrement du plan par des impulsions,

$$P(x, y) = \sum_k \sum_l \delta(x - k\Delta x, y - l\Delta y) \quad (1-3)$$

Les paramètres Δx et Δy contrôlent la densité de recouvrement des impulsions dans le plan (x, y) . L'échelon unité bidimensionnel définit une fonction $U(x, y)$ telle que,

$$U(x, y) = 1 \quad \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0$$

$$U(x, y) = 0 \quad \text{sinon} \quad (1-4)$$

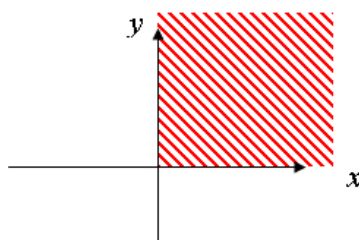


Figure 1-2 : Représentation de l'échelon unité bidimensionnel

Cette fonction recouvre ainsi le quart du plan (x, y) . La fonction porte bidimensionnelle notée $rect(x, y)$ définit une zone du plan (x, y) délimitée par un quadrilatère,

$$rect(x, y) = 1 \quad \text{si } -\frac{1}{2} \geq x \geq \frac{1}{2} \text{ et } -\frac{1}{2} \geq y \geq \frac{1}{2}$$

$$rect(x, y) = 0 \quad \text{sinon}$$

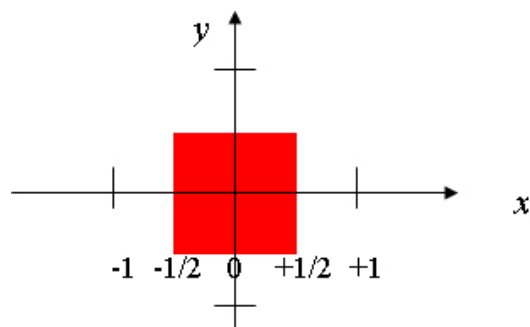


Figure 1-3 : Représentation de la porte bidimensionnelle

Une classe importante des signaux élémentaires est constituée par les signaux sinusoïdaux. Ils permettent en particulier de mettre en évidence le placement des fréquences spatiales dans le plan de Fourier à deux dimensions (cf la partie 2). Les caractéristiques d'un signal sinusoïdal bidimensionnel $S(x, y)$, en dehors de son amplitude et de sa phase, sont sa fréquence et sa direction de propagation. Dans l'exemple 1 ci-dessous, la sinusoïde bidimensionnelle se propage selon l'axe y et sa fréquence spatiale vaut $1/\lambda$.

Exemple : Exemple 1

$$S_1(x, y) = \sin(2\pi y/\lambda)$$

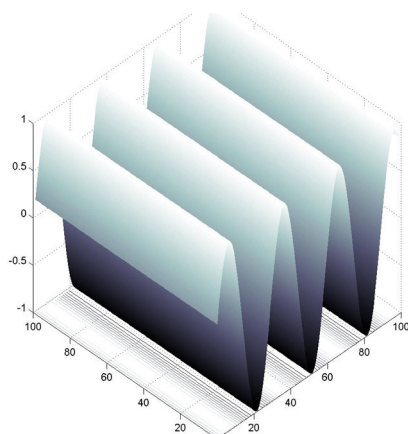
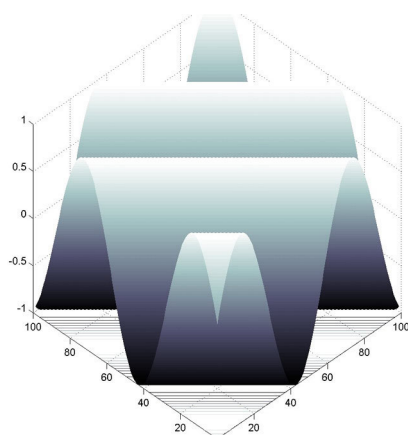


Figure 1-4 : Représentation de la sinusoïde bidimensionnelle. Cas de l'exemple 1.

Exemple : Exemple 2

$$S_1(x, y) = \sin(2\pi(x + y)/\lambda)$$



1-5 : Représentation de la sinusoïde bidimensionnelle. Cas de l'exemple 2.

Pour pouvoir être manipulées en machine, les images analogiques sont transmises à un ensemble de processus qui en effectuent la discrétisation. Le problème de l'échantillonnage et de la quantification des images sera traité dans le dernier chapitre de cette partie. Formellement, une image discrète se présente comme une matrice de points appelés les pixels) $I(m, n)$,

$$I(m, n) = \begin{pmatrix} x(m_1, n_1) & x(m_1, n_2) & \dots & x(m_1, n_N) \\ x(m_2, n_1) & & & \\ \vdots & & & \\ x(m_M, n_1) & & & \end{pmatrix} \quad (1-5)$$

Le signal bidimensionnel $I(m, n)$ est une fonction réelle ou complexe des deux variables m et n complètement indépendantes. L'étendue de l'image représente le domaine de variation des variables entières définissant l'image.

Nous présentons maintenant les représentations discrètes associées aux différents signaux définis au début de ce chapitre. L'impulsion de Dirac bidimensionnelle discrète $\delta(m, n)$ diffère de son homologue analogique en ce sens elle n'est pas une distribution mais un signal valant 1 en $(0, 0)$ et 0 ailleurs. Toute image discrète peut-être définie comme une combinaison d'impulsions discrètes décalées,

$$I(m, n) = \sum_k \sum_l I(k, l) \delta(m - k, n - l) \quad (1-6)$$

Ce relation définit également le produit de convolution bidimensionnel discret entre $I(m, n)$ et $\delta(m, n)$ et se généralise en remplaçant $S_1(x, y) = \sin(2\pi y/\lambda)$ par un signal $h(m, n)$ quelconque qui représente alors la réponse impulsionnelle discrète d'un filtre bidimensionnelle discret.

Signaux bidimensionnels

Impulsion unité bidimensionnelle

$$\delta(k, l) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=l=0 \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

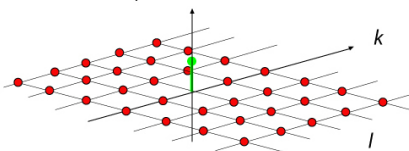


Figure 1-6 : Représentation de l'impulsion de Dirac bidimensionnelle discrète. .

L'exemple suivant définit une image composée de quatre impulsions de Dirac au voisinage de l'origine,

$$x(k, l) = \delta(k, l) + \delta(k - 1, l) + \delta(k - 1, l - 1) + \delta(k, l - 1) \quad (1-7)$$

Signaux bidimensionnels

Exemple 1

$$x(k, l) = \delta(k, l) + \delta(k - 1, l) + \delta(k - 1, l - 1) + \delta(k, l - 1)$$

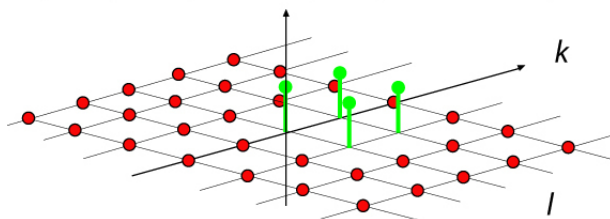


Figure 1-7 : Représentation d'un signal bidimensionnelle discret.

L'échelon bidimensionnel discret $U(k, l)$ défini un domaine constitué par le quadrant supérieur droit du plan (k, l) :

$$\begin{aligned} U(k, l) &= 1 \quad \text{si } k \geq 0 \text{ et } l \geq 0 \\ U(k, l) &= 0 \quad \text{ailleurs} \quad (1-8) \end{aligned}$$

Signaux bidimensionnels

Echelon bidimensionnel

$$U(k, l) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \text{ et } l \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

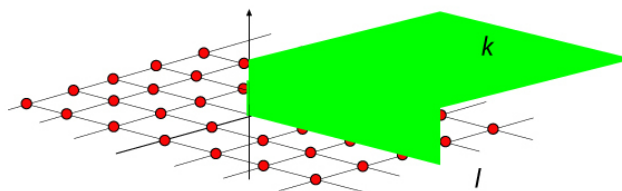


Figure 1-8 : Représentation de l'échelon bidimensionnel discret.

La porte bidimensionnelle discrète $rect_{K,L}(k, l)$ définie un domaine rectangulaire de paramètres K et L . Par convention l'origine en constitue le coin inférieur gauche :

$$rect_{K,L}(k, l) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq k \leq K-1 \text{ et } 0 \leq l \leq L-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1-9)$$

Signaux bidimensionnels

Porte bidimensionnelle

$$rect_{K,L}(k, l) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq k \leq K-1 \\ & \text{et si } 0 \leq l \leq L-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

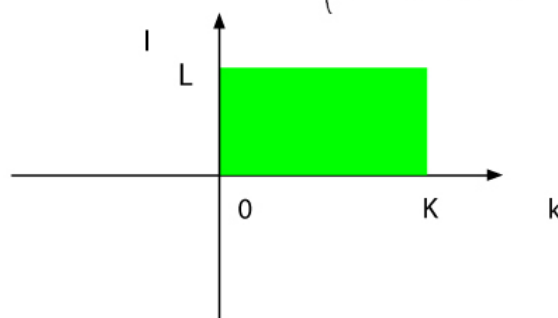


Figure 1-9 : Représentation de la porte bidimensionnelle discrète.

Parmi l'ensemble des signaux bidimensionnels on distingue une classe importante constituée par les signaux séparables. Un signal bidimensionnel $x(k, l)$ est dit séparable quand son expression vérifie la propriété suivante :

$$x(k, l) = x_1(k)x_2(l) \quad (1-10)$$

La séparabilité est une propriété qui peut avantageusement mise à profit lors de la réalisation d'opérations complexes comme la convolution. Les calculs peuvent alors être traités en prenant en compte une dimension unique. L'impulsion de Dirac et l'échelon bidimensionnel sont deux exemples de signaux séparables :

$$\delta(k, l) = \delta(k)\delta(l)$$

$$U(k, l) = U(k)U(l) \quad (1 - 11)$$

3. Analyse fréquentielle des images

L'outil utilisé classiquement pour l'analyse fréquentielle est la transformée de Fourier 2D et ses versions discrétisées et optimisées pour le calcul en machine : la transformée de Fourier discrète (TFD) et surtout la transformée de Fourier rapide (TFR) plus connue sous son acronyme anglophone, FFT (Fast Fourier Transform). Dans le domaine du codage ou de la compression on a recouru à d'autres représentations fréquentielles plus adaptées comme la transformée de Fourier discrète en cosinus (DCT) utilisée dans le codeur JPEG.

On considère tout d'abord ici une image comme une quantité bidimensionnelle à coordonnées continues $f(x, y)$.

Définition

On notera $F(u, v)$ la transformée de Fourier à deux dimensions de l'image $f(x, y)$ telle que :

$$F(u, v) = \int \int_D f(x, y) e^{-2\pi j(xu + yv)} dx dy$$

D représente le domaine de définition de l'image $f(x, y)$. Les quantités u et v sont des quantités réelles et représentent l'emplacement des fréquences spatiales du spectre bidimensionnel F .

Propriétés:

Dans la liste suivante sont rassemblées les principales propriétés de la Transformée de Fourier bidimensionnelle. Respectivement : symétrie spatiale, séparabilité, symétrie hermitienne, translation spatiale et convolution bidimensionnelle.

$$\begin{aligned} f(\pm x, \pm y) &\Leftrightarrow F(\pm u, \pm v) \\ f_1(x)f_2(y) &\Leftrightarrow F_1(u)F_2(v) \\ f * (x, y) &\Leftrightarrow F(-u, -v) \quad (2 - 2) \\ f(x - x_0, y - y_0) &\Leftrightarrow e^{-2\pi j(x_0u + y_0v)} F(u, v) \\ f(x, y) * h(x, y) &\Leftrightarrow F(u, v)H(u, v) \end{aligned}$$

Remarque

La propriété de séparabilité est intéressante dans le cas du filtrage linéaire lorsque $f(x, y)$ représente la réponse impulsionnelle d'un filtre. Il est possible dans ce cas de décomposer l'opération de filtrage 2d en deux opérations de filtrage 1d, ce qui allège d'autant mieux la charge de calcul. La dernière propriété (convolution bidimensionnelle) est très importante en filtrage et traduit la compatibilité de la transformée de Fourier avec cette opération. En d'autres termes, elle signifie que le calcul résultant du passage d'une image dans un filtre linéaire peut être calculée par un produit simple dans le domaine des fréquences spatiales. Ajoutons que cette alternative est réellement avantageuse quand les transformées de Fourier sont calculées par des algorithmes rapides : utilisation des FFT (Fast Fourier Transform).

Démonstration : propriété de séparabilité.

Soit une image $f(x, y)$ séparable, posons $F(u, v)$ comme la TF2D appliquée à f . On a,

$$F(u, v) = \iint_D f_1(x)f_2(y)e^{-2\pi j(xu + yv)} dx dy \quad (2 - 3)$$

Il est aisé de remarquer que le noyau de la TF2D est lui-même séparable,

$$e^{-2\pi j(xu + yv)} = e^{-2\pi jxu} e^{-2\pi jyv} \quad (2 - 4)$$

Ainsi, il vient :

$$F(u, v) = \int_R f_1(x)e^{-2\pi jxu} dx \int_R f_2(y)e^{-2\pi jyv} dy = F_1(u)F_2(v) \quad (2 - 5)$$

$F1(u)$ et $F2(v)$ sont les transformées 1D respectives de $f1(x)$ et $f2(y)$. $F(u, v)$ est donc séparable.

La liste suivante reporte les Transformées de Fourier 2D de signaux élémentaires. Respectivement : l'impulsion de Dirac, l'impulsion de Dirac décalée, l'ouverture gaussienne et l'ouverture rectangulaire.

$$\begin{aligned} \delta(x, y) &\Leftrightarrow 1 \\ \delta(x - x_0, y - y_0) &\Leftrightarrow \exp(-2\pi j(x_0 u + y_0 v)) \\ \exp(-\pi(x^2 + y^2)) &\Leftrightarrow \exp(-\pi(u^2 + v^2)) \\ \text{rect}(x, y) &\Leftrightarrow \text{sinc}(u, v) \end{aligned} \quad (2-6)$$

Exemple : Calcul de la TF2D de la porte bidimensionnelle $\text{rect}(x, y)$

Soit $\text{rect}(x, y)$ une porte bidimensionnelle de paramètres unitaires. En appliquant la Transformée de Fourier 2D il vient :

$$F(u, v) = \int_{-1/2}^{+1/2} \int_{-1/2}^{+1/2} e^{-2\pi j(xu + yv)} dx dy \quad (2-7)$$

soit en exploitant la séparabilité du noyau :

$$F(u, v) = \int_{-1/2}^{+1/2} e^{-2\pi jxu} dx \int_{-1/2}^{+1/2} e^{-2\pi jyv} dy \quad (2-8)$$

Après intégration et en utilisant les relations d'Euler on obtient finalement :

$$F(u, v) = \int_{-1/2}^{+1/2} e^{-2\pi jxu} dx \int_{-1/2}^{+1/2} e^{-2\pi jyv} dy \quad (2-9)$$

Ce produit définit la fonction séparable $\text{sinc}(u, v)$. Elle possède un lobe principal et des lobes secondaires délimités par un réseau des lignes horizontales et verticales qui traduisent les positions des zéros des fonctions sinus au numérateur de $F(u, v)$. L'amplitude maximale est de 1 pour la fréquence $(0, 0)$.

Afin de clore cette partie nous étudions maintenant le cas de la sinusoïde bidimensionnelle. Nous reprenons le cas des exemples 1 et 2 du chapitre précédent. Soit $S_1(x, y) = \sin(2\pi y/\lambda)$. Appliquons la transformée de Fourier 2D à S_1 ,

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi y/\lambda) e^{-2\pi j(xu + yv)} dx dy \quad (2-10)$$

En remplaçant la fonction sinus par des exponentielles complexes il vient,

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j2\pi y/\lambda} - e^{-j2\pi y/\lambda}}{2j} e^{-2\pi j(xu + yv)} dx dy \quad (2-11)$$

Le regroupement des exponentielles d'argument commun en x et y fait apparaître finalement deux termes,

$$F(u, v) = [\delta(u, v - \frac{1}{\lambda}) - \delta(u, v + \frac{1}{\lambda})]/2j \quad (2-12)$$

$F(u, v)$ est donc constituée de deux impulsions de Dirac qui se répartissent sur l'axe v de part et d'autre de l'origine des fréquences spatiales.

Exemple : Exemple 1

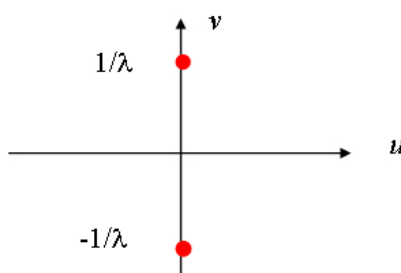


Figure 2-1 : Représentation fréquentielle de la sinusoïde bidimensionnelle. Cas de l'exemple 1.

Exemple : Exemple 2

Dans le cas de l'exemple 2, nous avons $S_2(x, y) = \sin(2\pi(x + y)/\lambda)$. Le calcul de la transformée de Fourier 2D appliqué à S_2 donne :

$$F(u, v) = [\delta(u - \frac{1}{\lambda}, v - \frac{1}{\lambda}) - \delta(u + \frac{1}{\lambda}, v + \frac{1}{\lambda})]/2j \quad (2 - 12)$$

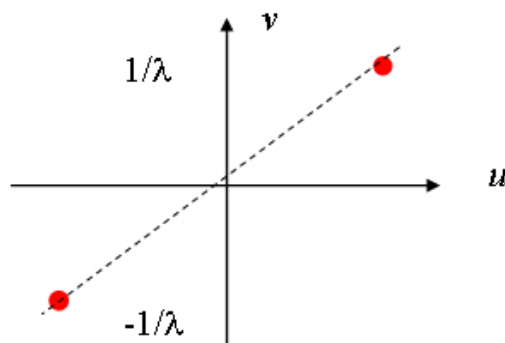


Figure 2-2 : Représentation fréquentielle de la sinusoïde bidimensionnelle. Cas de l'exemple 2.

4. Filtrage spatial

Les techniques de filtrage constituent un volet important des systèmes de traitement d'image, notamment pour le rehaussement et la restauration. On considère ici uniquement la classe des systèmes linéaires et spatialement invariants. On démontre que l'image $g(x, y)$ résultant du passage d'une image $f(x, y)$ dans un tel système se calcule en effectuant le produit de convolution bidimensionnel avec la réponse impulsionnelle $h(x, y)$ du système,

$$f(x, y) \rightarrow \boxed{h(x, y)} \rightarrow g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$$



Figure 3-1 : Représentation fonctionnelle d'un système linéaire invariant par translation spatiale.

Avec,

$$g(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} f(x - x', y - y') h(x', y') dx' dy'$$

Dans cette expression, la réponse impulsionnelle $h(x, y)$ est définie comme la réponse du système à une impulsion de Dirac bidimensionnelle,

$$h(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \delta(x - x', y - y') h(x', y') dx' dy' \quad (3 - 2)$$

La connaissance de cette fonction caractérise complètement le système linéaire et spatialement invariant et permet ainsi de calculer sa réponse à n'importe quelle excitation. Du point de vue de ses propriétés mathématiques, le produit de convolution bidimensionnel est commutatif, associatif et distributif par rapport à l'addition. L'impulsion de Dirac est l'élément neutre de cet opérateur. Une des conséquences importantes de ces propriétés concerne la combinaison de plusieurs systèmes linéaires invariants. Ainsi l'association en série de plusieurs systèmes conduit à un système unique linéaire et invariant dont la réponse impulsionnelle est le produit de convolution des éléments de la série. L'association en parallèle de plusieurs

systèmes conduit à un système linéaire et invariant unique dont la réponse impulsionnelle est la somme des réponses des éléments des diverses branches.

Afin de caractériser les propriétés fréquentielles des systèmes linéaires invariants on étudie maintenant la réponse d'un tel système à une excitation sinusoïdale complexe $f(x, y)$,

$$f(x, y) = e^{-2\pi j(xu+yv)} \quad (3-3)$$

les quantités u et v représentent les fréquences spatiales le long des axes x et y . On calcule maintenant la réponse d'un système linéaire invariant $h(x, y)$ au signal $f(x, y)$. Appliquons le produit de convolution à f :

$$g(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} e^{+2\pi j[(x-x')u+(y-y')v]} h(x', y') dx' dy' \quad (3-4)$$

Il vient immédiatement,

$$g(x, y) = e^{+2\pi j(xu+yv)} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} e^{-2\pi j(x'u+y'v)} h(x', y') dx' dy' \quad (3-5)$$

La réponse est formée par le produit entre le signal de départ $f(x, y)$ et un terme intégral qui ne dépend que de $h(x, y)$ et des fréquences u et v . L'image de sortie est donc une image de même fréquence modifiée par un terme complexe fonction des fréquences u et v . Ce terme constitue la réponse fréquentielle $H(u, v)$ du système $h(x, y)$. Il correspond exactement à la transformée de Fourier bidimensionnelle de la réponse impulsionnelle $h(x, y)$.

$$H(u, v) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} e^{-2\pi j(x'u+y'v)} h(x', y') dx' dy' \quad (3-6)$$

Dans de nombreuses situations la détermination du produit de convolution est facilitée par l'utilisation de la Transformée de Fourier. En effet, parmi les propriétés de la TF2D étudiées précédemment celle relative au produit de convolution s'applique directement dans le cas des systèmes linéaires invariants,

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow G(u, v) = F(u, v)H(u, v) \quad (3-7)$$

Le calcul de $g(x, y)$ nécessite deux transformées directes effectuées sur l'image $f(x, y)$ et la réponse du filtre ainsi qu'une transformée inverse effectuée sur le produit $G(x, y)$.

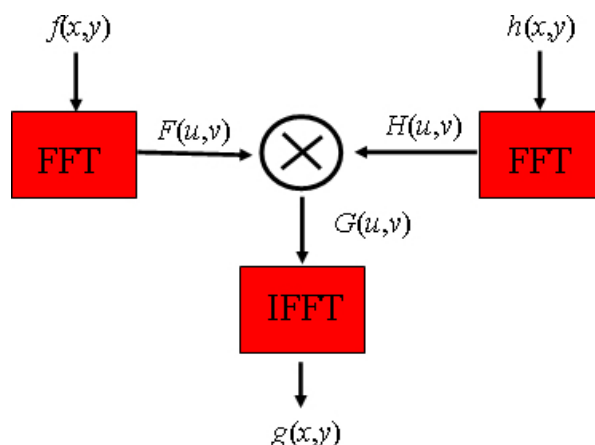


Figure -3-2 : Diagramme fonctionnel de calcul du filtrage spatial d'une image en utilisant la transformée de Fourier.

Pour que ce schéma de calcul soit réellement efficace, les transformées de Fourier doivent être des versions optimisées pour le calcul, on parle alors de transformées de Fourier rapides (FFT pour Fast Fourier Transform en anglais). L'étude approfondie des FFT sort du cadre de ce cours, néanmoins on pourra se reporter à la référence [[Traitement numérique du signal, théorie et pratique]] pour un complément d'informations.

5. Echantillonnage et quantification

Pour pouvoir être traitées par un ordinateur les images analogiques doivent d'abord être échantillonnées et quantifiées. On traite ici du cas de l'échantillonnage idéal des images. Le modèle de l'échantillonneur idéal est constitué par un simple produit de l'image initiale $I(x,y)$ par un peigne de Dirac bidimensionnel. Il en résulte une image échantillonnée $I_e(x,y)$ pour laquelle les valeurs correspondent aux luminances relevées sur une grille régulière de paramètres $\Delta x \Delta y$.

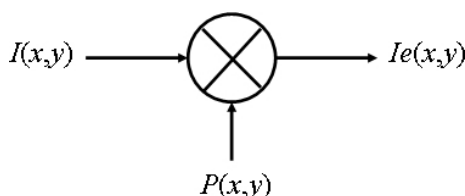


Figure 4-1 : Schéma de l'échantillonneur idéal

Expression de l'image échantillonnée :

$$I_e(x,y) = \sum_m \sum_n I(m\Delta x, n\Delta y) \delta(x - m\Delta x, y - n\Delta y) \quad (4-1)$$

Les poids $I(m\Delta x, n\Delta y)$ associés aux impulsions de Dirac sont les échantillons ou pixels de l'image. Le théorème de Shannon étendu à deux dimensions s'énonce de la même façon que dans le cas monodimensionnel avec cependant un degré de latitude supplémentaire lié à la géométrie du motif d'échantillonnage. Ce point ne sera pas abordé ici ou nous nous contenterons d'un pavage régulier rectangulaire du plan.

Définition : Théorème d'échantillonnage bidimensionnel

Un image analogique $I(x,y)$ limitée aux fréquences spatiales X_{max} et Y_{max} ne peut être reconstituée à partir de ces échantillons $I(m\Delta x, n\Delta y)$ que si ils sont prélevés avec des périodes telles que :

$$\Delta x \leq \frac{1}{X_{max}} \text{ et } \Delta y \leq \frac{1}{Y_{max}} \quad (4-2)$$

Pour comprendre la représentation fréquentielle de l'image échantillonnée, il faut d'abord calculer sa transformée de Fourier. Posons ainsi,

$$Fe(u,v) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} I_e(x,y) e^{-2\pi j(xu+yv)} dx dy \quad (4-3)$$

Le remplacement dans $Fe(u,v)$ de $I_e(x,y)$ par son expression aboutit à l'intégration d'une double somme qui par linéarité conduit à permuter les signes sommes et l'intégrale double ce qui conduit à,

$$Fe(u,v) = \sum_m \sum_n I(m\Delta x, n\Delta y) \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \delta(x - m\Delta x, y - n\Delta y) e^{-2\pi j(xu+yv)} dx dy \quad (4-4)$$

Dans le terme intégral, on reconnaît la transformée de Fourier d'un Dirac translaté dans le plan des quantités $(m\Delta x, n\Delta y)$. En choisissant des valeurs unitaires pour $(\Delta x, \Delta y)$, il vient finalement,

$$Fe(u,v) = \sum_m \sum_n I(m,n) e^{-2\pi j(mu+nv)} \quad (4-5)$$

C'est la forme simplifiée de la transformée bidimensionnelle appliquée aux images discrètes. Pour comprendre le lien entre les spectres des images discrète et analogique on peut remarquer que l'image signal $I_e(x,y)$ est obtenue à partir d'un produit entre l'image analogique et le peigne bidimensionnel, il en résulte que sa transformée de Fourier est le résultat d'un produit de convolution entre la transformée de l'image $F(u,v)$ et celle du peigne,

$$Fe(u,v) = F(u,v) * \left[\frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_m \sum_n \delta\left(u - \frac{m}{\Delta x}, v - \frac{n}{\Delta y}\right) \right] \quad (4-6)$$

Il vient,

$$Fe(u, v) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_m \sum_n F\left(u - \frac{m}{\Delta x}, v - \frac{n}{\Delta y}\right) \quad (4-7)$$

Ainsi $Fe(u, v)$ résulte de la périodisation du motif formée par $F(u, v)$ le long des axes u et v . $Fe(u, v)$ est une fonction doublement périodique en $(1/\Delta x, 1/\Delta y)$. Pour pouvoir représenter $Fe(u, v)$ sans perte d'information, il suffit de restreindre la représentation dans le plan des fréquences spatiales à une cellule rectangulaire unique de dimensions $(1/\Delta x, 1/\Delta y)$ centrée par exemple sur la fréquence $(0, 0)$. La figure ci-dessous représente le domaine de définition de $Fe(u, v)$ restreint à une période.

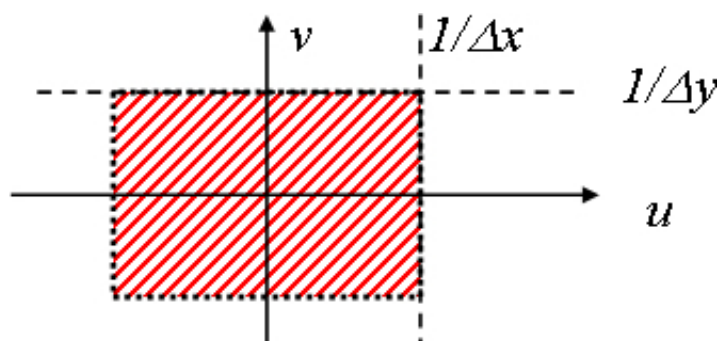


Figure 4-2: Domaine de définition du spectre de l'image échantillonnée restreint à la période principale centrée sur l'origine.

Exemple : Calcul de la Transformée de Fourier d'une porte discrète.

Soit une porte discrète bidimensionnelle $R(m, n)$ telle que :

$$R(m, n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \delta(m-k, n-l) \quad (4-8)$$

Appliquons la formulation de la TF appliquée aux cas discret. Il vient,

$$Fe(u, v) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} e^{-2\pi j(ku+lv)} \quad (4-9)$$

Séparons le terme exponentiel, il apparaît le produit de deux sommes des premiers termes de deux suites géométriques. Après la détermination de ces termes, on trouve finalement,

$$Fe(u, v) = e^{-j\pi(u+v)} \frac{\sin(\pi Mu)}{\sin(\pi u)} \frac{\sin(\pi Nv)}{\sin(\pi v)} \quad (4-10)$$

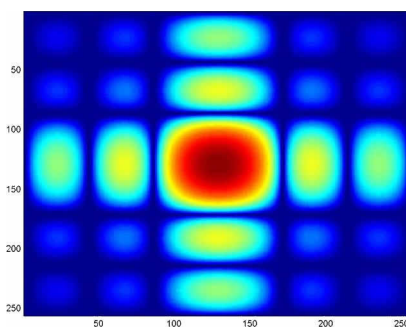


Figure 4-3: Représentation en niveaux de couleurs du spectre en module de la porte discrète.

Lorsque qu'une image est échantillonnée sans prendre en compte le critère de Shannon, il se produit un recouvrement entre les différents motifs formés par les répliques du spectre de l'image initiale. C'est le phénomène de repliement ou aliasing en anglais. Dans le cas spécifique des images, on parle de moirage par désigner le phénomène de repliement. Pour mettre en évidence ce phénomène, une technique consiste à sous échantillonner une image constituée d'un réseau de lignes à l'exemple de la figure ci-dessous :

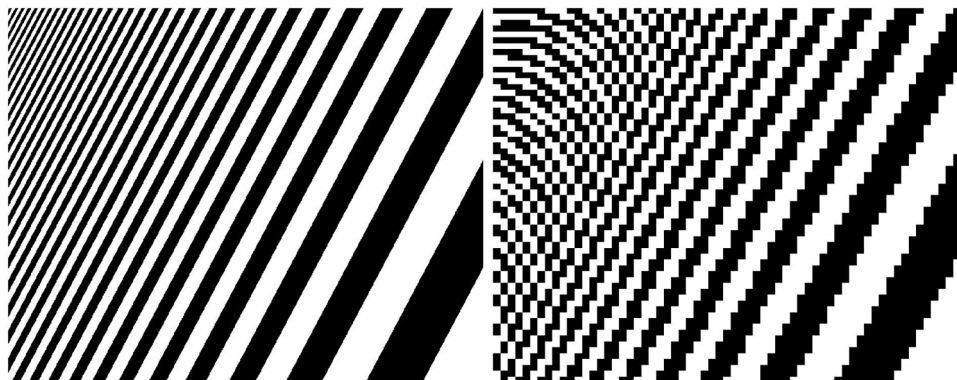


Figure 4-4 : Exemple

Par rapport à la représentation d'une image en machine, l'image $Ie(x,y)$ est un ensemble d'impulsions de Dirac où chaque impulsion est au centre d'un pixel et a pour amplitude l'intensité de ce pixel. Tout le reste du pixel a une intensité nulle. La représentation sous forme de pixels correspond au filtrage de l'image $Ie(x,y)$ par un filtre dont la réponse impulsionnelle est une fonction égale à 1 à l'intérieur de la zone support d'un pixel centré à l'origine et nulle partout ailleurs.

Un processus de quantification complète l'étape d'échantillonnage en associant à la valeur d'un pixel une valeur appartenant à un ensemble discret dont le cardinal est la plupart du temps lié à la représentation binaire utilisée pour stocker la valeur quantifiée. La quantification consiste à diviser la gamme dynamique D des luminances en un nombre fini d'intervalles. La gamme dynamique est déterminée par le support physique de l'information avant numérisation. Le problème posé est alors le nombre de niveaux de quantification. Un mauvais choix conduit à l'apparition de contours artificiels dans l'image qui traduit les sauts de passage d'un niveau de quantification au suivant. L'amplitude de l'intervalle de quantification doit alors être choisi inférieur à une quantité appelée échelon liminaire de luminance C_w . Cette quantité représente le minimum de variation relative de luminance perceptible par un observateur moyen. On obtient alors une formulation permettant d'obtenir le nombre N_q de niveaux nécessaires en fonction de la gamme dynamique D et de l'échelon C_w :

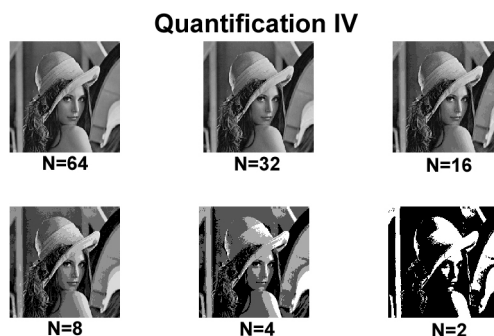
$$N_q = \frac{D}{\log_{10}(1 + C_w)} \quad (4 - 11)$$

Exemple

Soient $D = 2$ pour une photographie, et $C_w = 0.01$ correspondant à un bon observateur. Il vient,

$$N_q = \frac{2}{\log_{10}(1 + 0.01)} = 462.81$$

Il faut prendre alors $N = 512$ niveaux, soit 9 bits de quantification pour coder les différents pixels. Le même calcul avec un observateur moyen, soit $C_w = 0.02$ conduit à $N = 256$ niveaux c'est à dire 8 bits de quantification ou encore un octet. C'est la valeur la plus fréquemment rencontrée pour les applications multimédia.



Figures 4-5 : Les différentes versions de l'image LENA obtenues à partir de l'image originale

6. Systèmes bidimensionnels discrets

Les résultats concernant le filtrage bidimensionnel se transposent aisément dans le domaine des signaux discrets. La classe la plus importante des filtres numériques appliqués aux images est définie par le système bidimensionnel discret linéaire et invariant par translation spatiale. Nous allons dans cette partie plus particulièrement nous pencher sur le mécanisme de l'opération de convolution dans le cas où celle-ci est réalisée dans le domaine spatial (par opposition au domaine fréquentiel).

Définition

Un système bidimensionnel discret \mathcal{S} est défini par un opérateur qui met en correspondance deux ensembles de signaux bidimensionnels. A tout signal $x(m, n)$ est associé une réponse $y(m, n)$ fonction de l'opérateur \mathcal{S} :

$$x(m, n) \rightarrow y(m, n) = \mathcal{S}[x(m, n)]$$

Parmi les systèmes bidimensionnels discrets une classe particulière est formée par la catégorie des systèmes à la fois linéaires et invariants par translation spatiale. On démontre que la relation entrée-sortie d'un tel système est déterminée par une opération de convolution discrète bidimensionnelle,

$$y(m, n) = \sum_k \sum_l x(k, l) h(m - k, n - l) \quad (5 - 2)$$

$$y(m, n) = x(m, n) * h(m, n)$$

Dans cette relation $h(m, n)$ est la réponse impulsionnelle discrète du système. Sa connaissance est nécessaire et suffisante pour caractériser complètement le système. D'autre part pour que cette relation ait un sens il est nécessaire que la double somme en k et l soit bornée pour tout signal $x(m, n)$ dont l'amplitude est bornée. Cette condition est réalisée quand la série des termes $h(k, l)$ converge en valeurs absolues. On parle alors d'un système stable,

$$\text{si } h(m, n) \text{ est stable alors } \sum_k \sum_l |h(k, l)| < \infty \quad (5 - 3)$$

La convolution discrète ne constitue pas une manière unique de calculer la réponse d'un système bidimensionnel discret à une excitation. L'alternative est donnée par l'équation aux différences finies qui lie les entrées et les sorties d'un système linéaire invariant en différents points du domaine spatial planaire,

$$\sum_{k=0}^{K1} \sum_{l=0}^{L1} a_{k,l} y(m - k, n - l) = \sum_{k'=0}^{K2} \sum_{l'=0}^{L2} b_{k',l'} x(m - k', n - l') \quad (5 - 4)$$

Outre la connaissance des coefficients qui régissent l'équation aux différences, il est nécessaire de préciser des conditions aux frontières du domaine de l'image résultante $y(m, n)$. C'est-à-dire les valeurs prises par les pixels $y(m, n)$ à la limite du domaine où commence le calcul. Ces conditions sont équivalentes aux conditions initiales que l'on définit pour les systèmes monodimensionnels dans le domaine temporel. Un point important à remarquer ici est que la réponse impulsionnelle n'apparaît pas explicitement dans le calcul de l'image résultante. Ceci

est particulièrement intéressant lorsque l'on doit mettre en oeuvre des filtres d'image dont la réponse est définie sur un domaine non borné. Ceci nous amène maintenant à distinguer deux catégories de filtres d'images à partir de l'équation aux différences finies.

6.1. Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF):

Cette classe de filtre correspond au cas particulier de l'équation aux différences dans laquelle l'ensemble des coefficients du membre de gauche de l'équation est réduit à un élément unique. Le pixel $y(m, n)$ de l'image résultante est fonction uniquement des pixels de l'image présentée à l'entrée du filtre. Il n'y a pas de récurrence.

$$y(m, n) = \frac{1}{a_{0,0}} \sum_{k'=0}^{K2} \sum_{l'=0}^{L2} b_{k',l'} x(m - k', n - l') \quad (5 - 5)$$

La réponse impulsionnelle apparaît directement dans l'équation aux différences en remarquant que la relation précédente traduit une relation de convolution entre $x(m, n)$ et les coefficients $b(k', l')$. Il vient,

$$h(m, n) = \frac{1}{a_{0,0}} \sum_{k'=0}^{K2} \sum_{l'=0}^{L2} b_{k',l'} \delta(k', l') \quad (5 - 6)$$

6.2. Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII):

C'est le cas le plus général. Le pixel $y(m, n)$ est calculé à partir de l'image présentée à l'entrée du filtre mais aussi en fonction de ceux du voisinage du pixel de l'image résultante. Il y a une récurrence entre les pixels de l'image de sortie.

$$y(m, n) = \frac{1}{a_{0,0}} \left[\sum_{k'=0}^{K2} \sum_{l'=0}^{L2} b_{k',l'} x(m - k', n - l') - \sum_{k=1}^{K1} \sum_{l=1}^{L1} a_{k,l} y(m - k, n - l) \right] \quad (5 - 7)$$

L'obtention de la réponse impulsionnelle dans ce cas n'est plus triviale et peut être obtenue en utilisant l'équation aux différences où l'on remplace l'image $x(m, n)$ par une impulsion de Dirac $d(m, n)$ en précisant par ailleurs les conditions aux frontières.

Nous abordons maintenant l'étude du mécanisme de la convolution discrète en se restreignant à la classe des filtres RIF qui est la seule exploitable pour son implémentation. Dans le cas d'un filtre à réponse impulsionnelle finie, on obtient pour l'image résultante la relation suivante,

$$y(m, n) = \sum_{k=k_1}^{k_1+K-1} \left(\sum_{l=l_1}^{l_1+L-1} x(k, l) h(m - l, n - k) \right) \quad (5 - 8)$$

Le domaine de définition de la réponse impulsionnelle $h(m, n)$ est restreint à une matrice de dimension (K, L) . Exemple avec $K = L = 3$, $k_1 = -1$ et $l_1 = -1$:

$$h(m, n) = \begin{pmatrix} h(1, -1) & h(1, 0) & h(1, 1) \\ h(0, -1) & h(0, 0) & h(0, 1) \\ h(-1, -1) & h(-1, 0) & h(-1, 1) \end{pmatrix} \quad (5 - 9)$$

Pour calculer l'image filtrée par $h(m, n)$ on utilise un masque appliqué sur l'image $x(m, n)$ qui permet d'en extraire la région qui participe au calcul du pixel $y(m, n)$ conformément à la relation précédente. Le calcul de l'image complète est effectué en déplaçant itérativement le masque sur tous les pixels de l'image $x(m, n)$. Quand le masque est positionné sur les régions englobant des pixels situés à l'extérieur de l'image, ils sont comptés comme nuls. L'exemple qui suit va permettre de préciser ce mécanisme.

Exemple

Soit à filtrer l'image $A(m, n)$ avec le filtre $h(m, n)$ tels que,

$$A(m, n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } h(m, n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5 - 10)$$

Nous appellerons $B(m, n)$ l'image résultante.

La première étape consiste à construire le masque $g(m, n)$ à partir du filtre. En effet l'équation (5.8) fait apparaître les termes de la réponse impulsionnelle du filtre $h(m-l, n-k)$ qui traduisent un retournement de la réponse $h(l, k)$ combiné à une translation dans le plan de paramètres (m, n) ,

$$\text{filtre } h(m, n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{masque } g(m, n) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5-11)$$

La deuxième étape consiste à effectuer deux boucles imbriquées sur la matrice A afin parcourir l'ensemble des pixels. A chaque itération est effectuée l'opération (5.8). Voici comment sont positionnés la matrice A et le masque à la première itération :

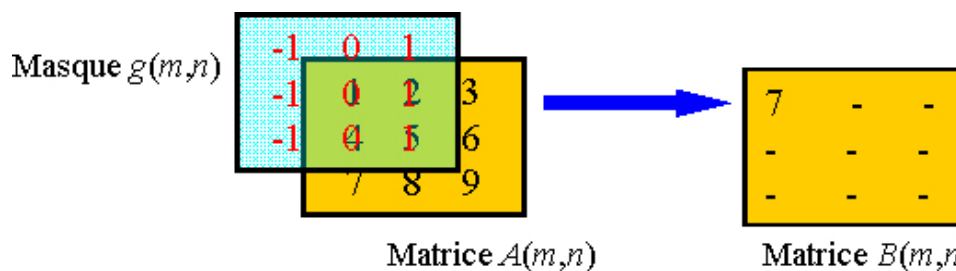


Figure 5-1: Illustration du positionnement de l'image A et du masque g à la première itération du filtrage.

Ce positionnement correspond au calcul du pixel $(1, 1)$ de l'image B . Sa valeur est donnée par, $B(1, 1) = -1 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 0 - 1 \times 0 + 0 \times 1 + 2 \times 1 - 1 \times 0 + 0 \times 4 + 1 \times 5$

L'ordre du parcourt des pixels de la matrice A n'a aucune importance. Le choix fait ici est tout à fait arbitraire, on aurait pu tout aussi bien commencer le calcul en positionnant la masque sur le pixel central de la matrice A . A l'issue du calcul, on obtient la matrice $B(m, n)$ suivante,

$$B(m, n) = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -7 \\ 15 & 6 & -15 \\ 13 & 4 & -13 \end{pmatrix} \quad (5-12)$$

6.3. Exemples de filtres RIF

Pour finir ce chapitre, nous allons maintenant passer en revue quelques exemples de filtres RIF parmi les plus utilisés dans le traitement des images. Les exemples qui suivent illustrent les résultats de filtrages appliqués à une image en niveau de gris qui reproduit la photographie d'un circuit imprimé. Cette image fait apparaître principalement un réseau de pistes horizontales et verticales qui concrétisent les conduites de courant dans le circuit.

a) Le filtre moyennneur

Il est défini par une porte discrète normalisée de telle façon que son gain soit de 0 dB à l'origine du plan des fréquences : Pour un ordre 3 on obtient pour sa réponse impulsionnelle,

$$h(m, n) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5-13)$$

Systèmes numériques bidimensionnels

Exemple 1 :

1	1	1
1	1	1
1	1	1

 x 1/9
Filtre moyennneur

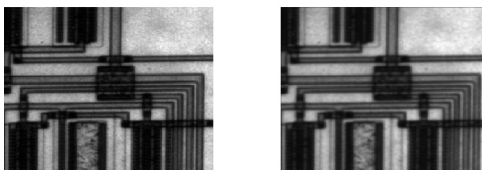


Figure 5-2 : Application du filtre moyennneur sur l'image test.

Le filtrage a pour effet de lisser les discontinuités visibles sur le circuit. Le contour des pistes apparaît ainsi plus flou. On constate aussi que ce phénomène est indépendant de l'orientation de l'image. Dans le domaine fréquentiel, le filtre moyennneur a la fonction d'un filtre passe-bas.

b) Le filtre passe-haut

Pour un ordre 3 on obtient pour la réponse impulsionnelle,

$$h(m, n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5 - 14)$$

Systèmes numériques bidimensionnels

Exemple 2 :

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

 Filtre passe haut

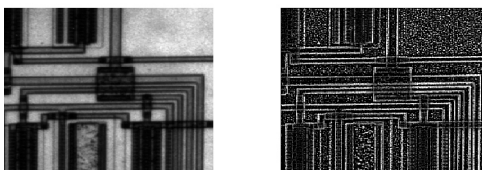


Figure 5-3: Application du filtre passe-haut sur l'image test.

On observe un renforcement du tracé des pistes qui traduisent des discontinuités mises en évidence par le filtre passe-haut. On observe également une remontée importante du bruit qui apparaît dans les zones uniformes extérieures aux pistes.

c) Le filtre différentiateur vertical

Pour un ordre 3 on obtient pour sa réponse impulsionnelle,

$$h(m, n) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5 - 15)$$

Systèmes numériques bidimensionnels

Exemple 5 :

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

 Filtre différentiateur vertical

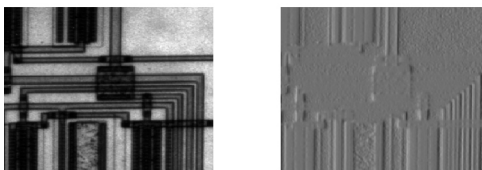


Figure 5-4: Application du filtre différentiateur vertical sur l'image test.

On remarque clairement sur l'image filtrée que seuls ressortent les contours des pistes verticales. Les pistes horizontales ont disparues car leur contour a été lissé par l'effet de moyenne du filtre qui s'applique dans la direction verticale

* *

*

Le filtrage linéaire représente une des opérations les plus élémentaires et les plus essentielles réalisées dans le cadre du traitement des images. Afin de pouvoir effectuer de tels traitements dans un ordinateur, les images doivent auparavant être numérisées, ce qui implique à la fois un échantillonnage dans le domaine spatial et une quantification dans le domaine des luminances. L'échantillonnage spatial induit des périodicités dans les représentations fréquentielles associées aux images traitées qui permettent d'en restreindre la description sur un domaine précis. L'opérateur de convolution spatiale est la représentation mathématique associée au filtrage linéaire invariant. L'opération peut se résoudre dans le domaine spatial ou fréquentiel selon la nature et la complexité des filtres utilisés. Dans les cas les plus simples, l'opérateur est entièrement décrit par une matrice dont les dimensions sont limitées à deux ou trois rangs. Des exemples de tels filtres et leur résultat sur des images réelles sont présentés et permettent de se faire une idée du potentiel applicatif de cette technique.

III. Etude de cas

1. Représentation et Filtrage d'images

Toutes les manipulations décrites dans la suite seront réalisées à partir de la version 6.1 de matlab ou supérieure équipée de la image processing toolbox 3.1 ou supérieure. L'image moon.tif fait partie de la banque d'images livrées avec la toolbox.

1.1. Les formats d'images dans Matlab

Matlab peut utiliser 3 types de données différentes pour stocker les images et 4 formats. Les 3 types de données sont:

Définition : uint8

Les nombres sont codés comme des entiers non-signés sur 8 bits. Les valeurs possibles vont de 0 à 255. Ce format est le plus économique en mémoire, mais ne permet pas de faire des opérations algébriques.

Définition : uint16

Les nombres sont codés comme des entiers non-signés sur 16 bits. Les valeurs possibles vont de 0 à 65535. Ce format est similaire à *uint8* mais offre une gamme de valeurs plus étendue. Il est rarement utilisé.

Définition : double

Les nombres sont codés dans le format à virgule flottante sur 64 bits. Toute valeur réelle est possible, dans les limites de précision. Ce format est le plus gourmand en mémoire, mais permet de faire toutes les opérations algébriques.

Les 4 formats d'images sont:

Définition : indexed

L'image est stockée dans une matrice 2D, dont les coefficients sont des indices sur une table de couleurs associée (colormap).

Pour les données *uint8* et *uint16* la valeur 0 correspond à la première ligne de la colormap, 1 à la deuxième, et ainsi de suite.

Pour les données *double* c'est la valeur 1.0 qui correspond à la première ligne, 2 à la deuxième, et ainsi de suite.

Définition : RGB ou truecolor

L'image est stockée dans une matrice 3D, de dimensions $(m, n, 3)$. La troisième dimension donne la décomposition RGB de la couleur du pixel.

Définition : intensity

L'image est stockée dans une matrice 2D dont les coefficients correspondent à des niveaux de gris.

Définition : binary

L'image est stockée dans une matrice 2D, dont les valeurs sont uniquement 0 ou 1 (noir, resp. blanc). Seulement des données *uint8* et *double* sont admissibles pour des images dans ce format.

Définition : colormap

C'est la table de couleurs associée à une image. C'est une matrice de type double de m lignes et 3 colonnes.

Chaque ligne donne la décomposition RGB d'une couleur. Les coefficients doivent se trouver dans l'intervalle $[0 : 0; 1 : 0]$.

1.2. Manipulations

1. Lire et afficher l'image moon.tif en niveaux de gris. Quel est le format de cette image ? Quel est le nombre de niveaux de quantification utilisé pour représenter cette image ?
2. Afficher l'image moon.tif en négatif en modifiant les valeurs des pixels de l'image.
3. Filtrage : Soit le filtre bidimensionnel $h(5, 5)$ séparable suivant,

$$\begin{array}{r}
 0.0357 \\
 0.2411 \\
 0.4464 \\
 0.2411 \\
 0.0357
 \end{array}
 \times
 \begin{bmatrix}
 0.0357 & 0.2411 & 0.4464 & 0.2411 & 0.0357 \\
 0.00127449 & 0.00860727 & 0.01593648 & 0.00860727 & 0.00127449 \\
 0.00860727 & 0.05812921 & 0.10762704 & 0.05812921 & 0.00860727 \\
 0.01593648 & 0.10762704 & 0.19927296 & 0.10762704 & 0.01593648 \\
 0.00860727 & 0.05812921 & 0.10762704 & 0.05812921 & 0.00860727 \\
 0.00127449 & 0.00860727 & 0.01593648 & 0.00860727 & 0.00127449
 \end{bmatrix}
 =$$

$$\frac{1}{6}
 \begin{vmatrix}
 -1 & -4 & -1 \\
 -4 & 26 & -4 \\
 -1 & -4 & -1
 \end{vmatrix}$$

4. Quelle conclusion pouvons-nous en tirer ?

2. Corrigé des manipulations

2.1. Corrigé des manipulations

1. Lire et afficher l'image moon.tif en niveaux de gris. Quel est le format de cette image ? Quel est le nombre de niveaux de quantification utilisé pour représenter cette image ?

```
>> [ x, m ] = imread('moon.tif');  
>> size(x)  
  
ans =  
  
537 358  
>> size(m)  
  
ans =  
  
0 0  
>> imshow(x)
```



Figure C1: affichage de l'image originale

```
>> max(max(x))  
  
ans =  
  
253  
>> min(min(x))  
  
ans =  
  
0
```

Remarque

moon.tif correspond à une image monochrome en niveaux de gris. Le niveau minimum est de 0 et la niveau maximum est de 253. Les pixels sont donc quantifiés sur 8 bits. Ce n'est pas une image indexée car la table des couleur est vide.

2. Afficher l'image moon.tif en négatif en modifiant les valeurs des pixels de l'image.

Il suffit de créer une matrice y de même dimension que x remplie de la valeur 255. On fait ensuite une différence avec l'image x puis on affiche,

```
>> y = ones(537,358)*255;
>> z = uint8(double(y)-double(x));
>> imshow(z)
```

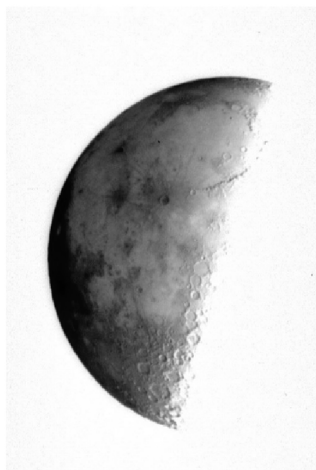


Figure C2 : affichage de l'image en négatif

Remarque

l'opération différence ne peut être réalisée qu'après conversion du format initial uint8 en format double. Il faut ensuite faire une conversion en sens inverse pour pouvoir afficher l'image.

3. Filtrage : Soit le filtre bidimensionnel $h(5,5)$ séparable suivant,

```
0.0357
0.2411
0.4464 × [0.0357    0.2411    0.4464    0.2411    0.0357] =
0.2411
0.0357
0.00127449  0.00860727  0.01593648  0.00860727  0.00127449
0.00860727  0.05812921  0.10762704  0.05812921  0.00860727
0.01593648  0.10762704  0.19927296  0.10762704  0.01593648
0.00860727  0.05812921  0.10762704  0.05812921  0.00860727
0.00127449  0.00860727  0.01593648  0.00860727  0.00127449
Création du filtre,
```

```
>> k=[0.0357 0.2411 0.4464 0.411 0.0357]
```

```
k =
```

```
0.0357 0.2411 0.4464 0.4110 0.0357
```

```
>> h = k'*k
```

```
h =
```

```
0.0013 0.0086 0.0159 0.0147 0.0013
0.0086 0.0581 0.1076 0.0991 0.0086
0.0159 0.1076 0.1993 0.1835 0.0159
0.0147 0.0991 0.1835 0.1689 0.0147
0.0013 0.0086 0.0159 0.0147 0.0013
```

Affichez la réponse fréquentielle (magnitude) de ce filtre.

```
>> freqz2(h)
```

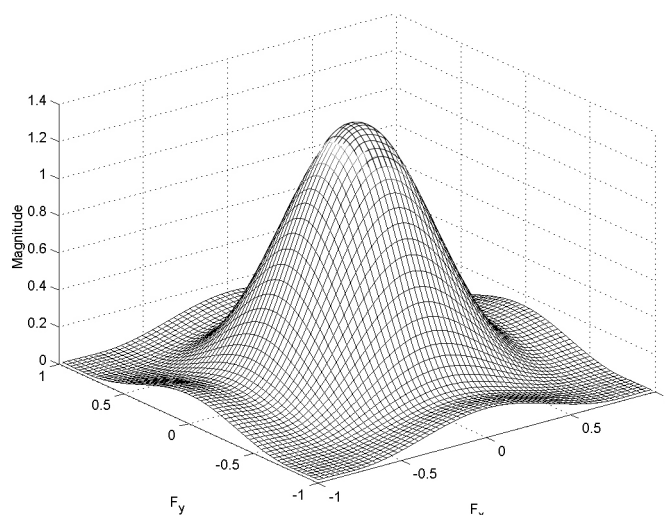


Figure C3 : Réponse en fréquence du filtre h

Remarque

la réponse fréquentielle possède un maximum centré sur l'origine c'est-à-dire sur la fréquence zéro. Il s'agit donc d'un filtre passe-bas.

Filtrez ensuite l'image moon.tif par convolution avec $h(5,5)$ et affichez le résultat.

```
>> fx = imfilter(x,h) ;
```

```
>> imshow(fx)
```



Figure C4: affichage de l'image filtrée avec h

Soit maintenant le filtre g suivant,

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 26 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\gg g = (1/6)*[-1 -4 -1; -4 26 -4; -1 -4 -1]$$

$g =$

$$\begin{bmatrix} -0.1667 & -0.6667 & -0.1667 \\ -0.6667 & 4.3333 & -0.6667 \\ -0.1667 & -0.6667 & -0.1667 \end{bmatrix}$$

Affichez sa réponse fréquentielle

\gg freqz2(g)

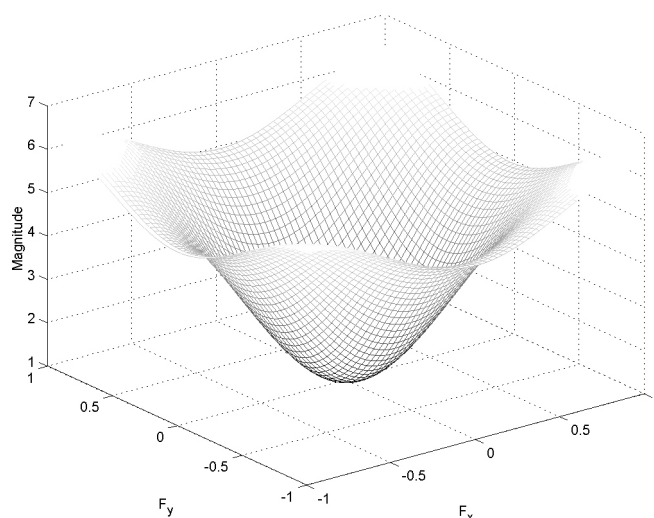


Figure C5 : Réponse en fréquence du filtre g

et appliquez-le à l'image résultante de l'étape précédente.

```
>> t = imfilter(fx,g);  
>> imshow(t)
```



Figure C6 : affichage de l'image filtrée successivement par h et par g

4. Quelle conclusion pouvons-nous en tirer ?

On observe une accentuation des détails et particulièrement des contours des cratères qui avaient été perdus dans le filtrage précédent.

Remarque

Cet exemple illustre une technique utilisée en rehaussement d'image appelée « unsharp masking »

IV. Exercices

1. Exercices sur le filtrage d'image

1.1. Exercices sur le filtrage d'image

Soit une matrice $b(4,4)$ représentant les échantillons d'une image, B est telle que,

$$b = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 8 \\ 5 & 5 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Question 1

[Solution n°1 p 30]

Filtrez cette image un filtre dont la réponse impulsionnelle $h(k,l)$ est constituée par la porte bidimensionnelle centrée de longueur 3 suivante :

$$h(k,l) = \text{rect}_{3,3}(k+1, l+1)$$

Soit le filtre $h(k,l)$ de réponse impulsionnelle telle que,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Question 2

[Solution n°2 p 30]

Ecrire la réponse impulsionnelle $h(k,l)$ en fonction d'une somme d'impulsions de Dirac décalées.

Question 3

[Solution n°3 p 30]

Montrez que le filtre $h(k,l)$ est séparable. Vous déterminez pour cela deux filtre unidimensionnels $h1(k)$ et $h2(l)$ tels que :

$$h = (h2^T) \cdot h1$$

Soit maintenant l'image $a(k,l)$ telle que

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Question 4

[Solution n°4 p 30]

Calculez, $a * h$, puis $(a * h1) * (h2^T)$, conclusion ?

Répondez à la question suivante.

Question 5

[Solution n°5 p 31]

On dispose d'un film dont la gamme dynamique est de $D = 3.6$ unité de densité optique. Avec combien de bits faut-il quantifier la luminance des échantillons d'une image sur ce support pour que l'erreur de quantification soit invisible pour un observateur moyen ?

Solution des exercices

>Solution n°1 (exercice p. 29)

Le filtre $h(k, l)$ tel que :

$$h(k, l) = \text{rect}_{3,3}(k+1, l+1)$$

Correspond à la matrice,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Le résultat du filtrage de l'image B par h donne,

$$b * h = \begin{vmatrix} 4 & 10 & 18 & 16 \\ 10 & 21 & 36 & 29 \\ 18 & 36 & 52 & 41 \\ 16 & 29 & 41 & 31 \end{vmatrix}$$

>Solution n°2 (exercice p. 29)

Soit le filtre $h(k, l)$ de réponse impulsionnelle telle que,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

La réponse impulsionnelle $h(k, l)$ en fonction d'une somme d'impulsions de Dirac décalées s'écrit,

$$h(k, l) = \delta(k+1, l-1) + \delta(k+1, l) + \delta(k+1, l+1) - \delta(k-1, l-1) - \delta(k-1, l) - \delta(k-1, l+1)$$

>Solution n°3 (exercice p. 29)

$h(k, l)$ est le résultat de la combinaison des deux vecteurs $h1$ et $h2$ ci-dessous. C'est donc un filtre est séparable,

$$h = (h2^T) \cdot h1 = [1 \ 1 \ 1]^T \cdot [1 \ 0 \ -1]$$

Soit maintenant l'image $a(k, l)$ telle que :

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

>Solution n°4 (exercice p. 29)

calcul de $a * h$,

$$a * h = \begin{vmatrix} 7 & 4 & -7 \\ 15 & 6 & -15 \\ 13 & 4 & -13 \end{vmatrix}$$

calcul de $(a * h1)$,

$$a * h1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 2 & -5 \\ 8 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

Calcul de $(a * h1) * (h2^T)$,

$$(a * h_1) * (h_2^T) = \begin{vmatrix} 7 & 4 & -7 \\ 15 & 6 & -15 \\ 13 & 4 & -13 \end{vmatrix}$$

Conclusion :

Les deux procédures de calculs conduisent au même résultat. Pour un filtre séparable le produit de convolution 2d peut donc être décomposé en deux convolutions 1d.

>Solution n°5 (exercice p. 29)

Avec $D = 3.6$ unité de densité optique et un observateur moyen, $C_w = 0.02$, le nombre de niveaux de quantification est donné par,

$$N_q = \frac{D}{\log_{10}(1 + C_w)} = \frac{3.6}{\log_{10}(1.02)} = 418.5963$$

En prenant la puissance de deux supérieure la plus proche, il vient $N = 512$ C'est-à-dire que les échantillons doivent être quantifiés sur 9 bits.

Bibliographie

[**Traitement numérique du signal, théorie et pratique**] BELLANGER MAURICE, *Traitement numérique du signal, théorie et pratique*, Masson, -, 1995, CNET-ENST Collection technique et scientifique des télécommunications.