

Métrologie optique par la transformation de Fourier fractionnaire

SÉBASTIEN COETMELLEC

Table des matières

I. Présentation	3
II. Cours	4
1. Détection des fonctions à dérive de fréquence linéaire.....	4
1.1. <i>Fréquence linéaire</i>	4
2. Propagation en espace libre et TF fractionnaire.....	6
2.1. <i>Résolution de l'équation de propagation par TF classique</i>	6
2.2. <i>Description de la propagation par TF fractionnaire</i>	8
3. Analyse d'hogrammes de fibre par TF fractionnaire.....	15
3.1. <i>Equations des hologrammes de fibre</i>	16
3.2. <i>Restitution des hologrammes de fibre par TF fractionnaire</i>	20
Bibliographie	25
Crédit des ressources	26

I.Présentation

Module :

Métrologie optique

Auteur(s) :

Sébastien COETMELLEC - Université de Rouen

Résumé :

-

Mots-clés :

-

Pré-requis :

-

Objectif(s) pédagogique(s) :

-

Plan du cours :

- Détection des fonctions à dérive de fréquence linéaire
- Propagation en espace libre et TF fractionnaire
- Analyse d'hologrammes de fibre par TF fractionnaire
- Conclusion

Conception & production :

PRN - Le Mans Université

Licence :

Licence GNU¹

1 - <http://www.gnu.org/licenses/fdl.txt>

II. Cours

1. Détection des fonctions à dérive de fréquence linéaire

1.1. Fréquence linéaire

Nous mettons ici en évidence l'utilité de la transformation de Fourier fractionnaire à l'analyse des signaux à dérive de fréquence linéaire appelés aussi chirps. Ces signaux sont caractérisés par une évolution linéaire de leur contenu spectral. Considérons le signal harmonique $u(x)$ défini par :

$$u(x) = \exp(i 2 \pi \chi x). \quad (1.1)$$

Sa fréquence instantanée est :

$$f_i(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = \chi, \quad (1.2)$$

où $\phi(x)$ est la phase de $u(x)$. Si la fréquence instantanée $f_i(x)$ est une constante pour tout x alors le signal $u(x)$ est dit stationnaire [1 [Temps-Fréquence]]. La Transformation de Fourier classique est bien adaptée à l'analyse de tels signaux. En effet, une TF de $u(x)$ permet de mettre en évidence de manière synthétique ses propriétés spectrales. Sa TF est une impulsion de Dirac centrée à la fréquence χ .

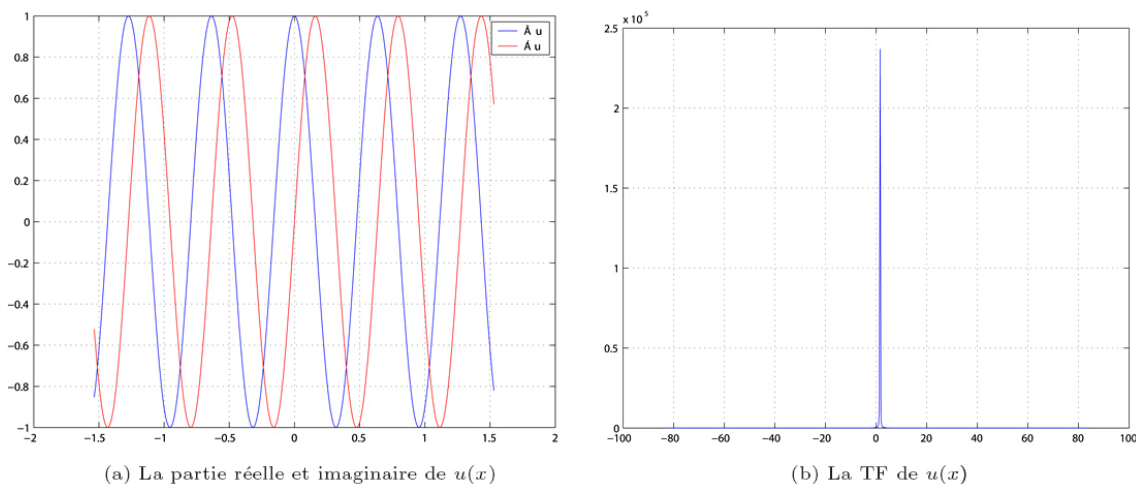


Figure 1 : Représentation de $u(x) = \exp(i2 \pi \chi x^2)$, ainsi que sa Transformation de Fourier

Les figures 1.(a) et (b) représentent $u(x)$ et sa transformée de Fourier. Si la fonction $u(x)$ est une fonction à dérive de fréquence linéaire telle que :

$$u(x) = \exp(i 2 \pi \chi x^2). \quad (1.3)$$

sa transformée de Fourier fractionnaire est égale à :

$$F_{\alpha}[u(x)] = \sqrt{\frac{1+i \tan \chi}{1+2 \chi \tan \alpha}} \exp\left[i \pi x^2 \frac{2 \chi - \tan \alpha}{1+2 \chi \tan \alpha}\right]. \quad (1.4)$$

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ on trouve la transformée de Fourier classique, qui est encore une fonction chirp.

Par contre pour $\alpha = \alpha_{opt} = \arctan\left(-\frac{1}{2\chi}\right)$ et en utilisant l'égalité [2 [Introduction à l'optique métaxiale. Première partie: diffraction métaxiale dans un espace homogène:]] :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi i \varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{i \varepsilon}\right) = \delta(x), \quad (1.5)$$

on obtient :

$$F_{\alpha_{opt}}[u(x)] = \delta(x). \quad (1.6)$$

Cette fois, la distribution de Dirac est centrée à l'origine des coordonnées. La fonction $u(x)$ est donc une fonction centrée.

Remarque

L'ordre fractionnaire définit la dérive de fréquence. La transformation de Fourier fractionnaire permet de détecter la présence d'un chirp linéaire dans un signal.

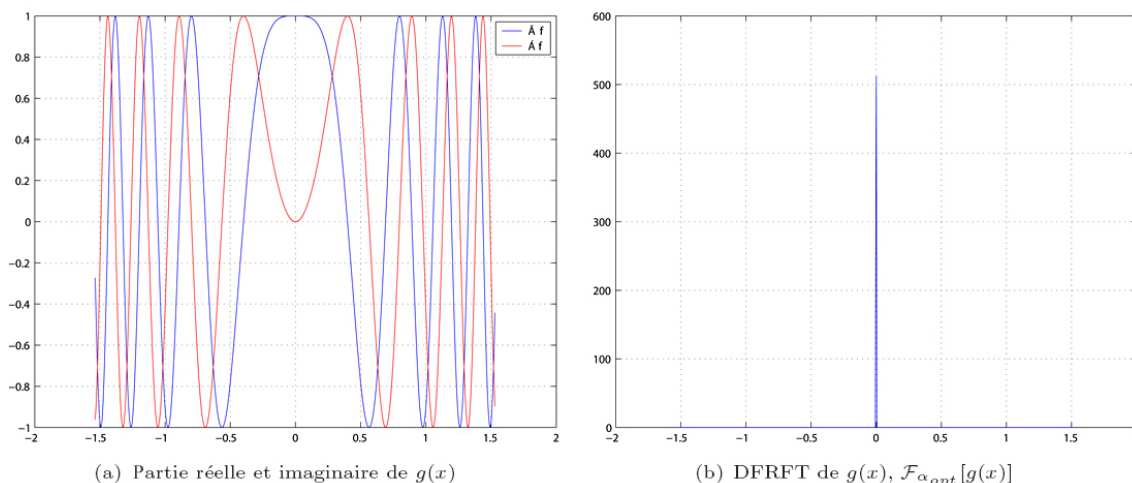


Figure 2 : Représentation de $g(x) = \exp(i2\pi \chi x^2)$ ainsi que sa transformation de Fourier fractionnaire d'ordre optimal

Les figures 2 (a) et (b) illustrent cette propriété. C'est d'ailleurs cette propriété qui nous permettra de réaliser une métrologie puisque les phénomènes de diffraction dans l'approximation de Fresnel sont à dérive de fréquence linéaire.

2. Propagation en espace libre et TF fractionnaire

2.1. Résolution de l'équation de propagation par TF classique

Pour commencer, nous allons considérer le cas où une onde d'amplitude U se propage entre deux plans séparés d'une distance z comme l'illustre la figure (3).

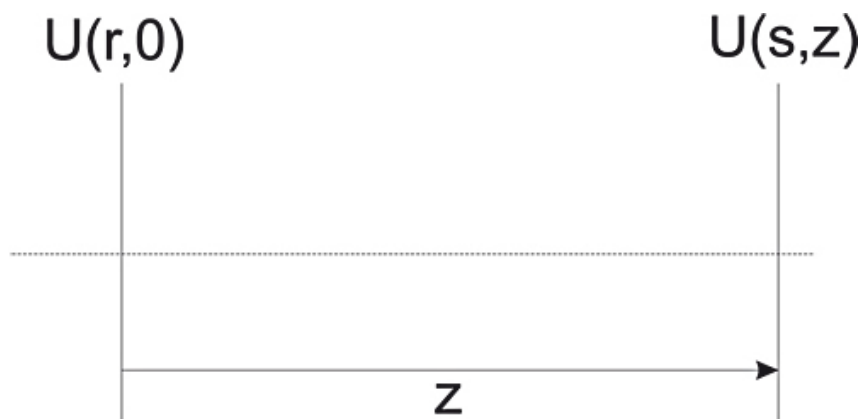


Figure 3 : Propagation d'une onde entre deux plans séparés d'une distance z

Le plan de gauche est le plan d'origine situé en $z = 0$. Il contient l'amplitude du champ notée $U(r, 0)$ avec $r = (\zeta, \eta)$. Le plan de droite est le plan d'arrivée situé à une distance Z du plan d'origine. Il contient l'amplitude du champ notée $U(s, z)$ avec $s = (x, y)$.

Rappel

La propagation entre deux plans en espace libre d'une onde est régie par l'équation différentielle suivante [3 [The Fractional Fourier Transform]] :

$$\nabla_{\perp}^2 U(s, z) + i 2k \frac{\partial U(s, z)}{\partial z} = 0, \quad (2.1)$$

où \perp définit le champ transversal de $U(s, z)$, $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde et λ la longueur d'onde.

Pour résoudre cette équation différentielle, nous pouvons utiliser la transformation de Fourier classique. En sachant que la transformation est définie par :

$$\mathbf{F}[f(s)](\sigma) = \hat{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \exp[-i 2\pi \sigma \cdot s] ds, \quad (2.2)$$

avec $\sigma = (u, v)$ et de norme $\sigma = \sqrt{u^2 + v^2}$. u et v sont les fréquences spatiales suivant les deux axes du système de coordonnées, $d\sigma = du dv$. Le produit scalaire $\sigma \cdot s$ nous donne $(ux + vy)$. L'équation différentielle (2.1) dans le domaine spectral devient alors :

$$i 2k \frac{\partial \hat{U}(\sigma, z)}{\partial z} = 4\pi^2 \sigma^2 \hat{U}(\sigma, z). \quad (2.3)$$

Dans le domaine spectral, l'équation différentielle d'ordre deux sur les variables spatiales (x, y) et un sur la variable z se transforme en une équation d'ordre un sur la variable de propagation z . La solution de cette équation est :

$$\hat{U}(\sigma, z) = \hat{U}(\sigma, 0) \exp[-i \pi \lambda z \sigma^2]. \quad (2.4)$$

L'expression de $U(s, z)$ dans le domaine spatial se détermine au moyen d'une transformation inverse de $\hat{U}(\sigma, z)$, c'est-à-dire :

$$U(s, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}(\sigma, z) \exp[i 2 \pi s \cdot \sigma] d\sigma. \quad (2.5)$$

En insérant l'équation (2.4) dans (2.5), on obtient :

$$U(s, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}(\sigma, 0) \times \exp[-i \pi \lambda z \sigma^2] \exp[i 2 \pi s \cdot \sigma] d\sigma. \quad (2.6)$$

Nous sommes donc ici dans le cas d'une transformation de Fourier sur le produit de deux fonctions en σ .

Dans le domaine spatial, cela se traduit par un produit de convolution. En sachant que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-p^2 u^2 \pm qu] du = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp\left[\frac{q^2}{4 p^2}\right], \quad (2.7)$$

on obtient la valeur du champ après propagation tel que :

$$U(s, z) = U(s, 0) * \left[\frac{1}{i \lambda z} \exp\left(\frac{i \pi}{\lambda z} s^2\right) \right]. \quad (2.8)$$

Le symbole $*$ représente la convolution bidimensionnelle sur les variables spatiales. La forme intégrale de la relation (2.8) bien connue est :

$$U(s, z) = \frac{1}{i \lambda z} \iint U(r, 0) \cdot \exp\left[\frac{i \pi}{\lambda z} (r-s)^2\right] dr. \quad (2.9)$$

Nous retrouvons souvent cette expression sous sa forme développée telle que :

$$U(s, z) = \frac{1}{i \lambda z} \exp\left[\frac{i \pi}{\lambda z} s^2\right] \iint U(r, 0) \exp\left[\frac{i \pi}{\lambda z} r^2\right] \exp\left[-i \frac{2 \pi}{\lambda z} r \cdot s\right] dr. \quad (2.10)$$

Remarque

Dans ce paragraphe la TF classique a été utilisée pour résoudre l'équation de propagation.

Attention

La structure mathématique de l'intégrale de Fresnel est très proche de la structure de la TF fractionnaire. Il n'y a donc pas de raison pour que l'intégrale de propagation ne s'exprime pas au moyen de la transformation de Fourier fractionnaire.

Le paragraphe qui suit expose la méthode.

2.2. Description de la propagation par TF fractionnaire

a) Dimensionnement des variables

Définition

La définition mathématique de la transformation de Fourier fractionnaire est la suivante :

$$F_{\alpha}[f(r)](s_a) = C(\alpha) \exp\left(i \frac{\pi s_a^2}{\tan \alpha}\right) \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(r) \exp\left(i \frac{\pi r^2}{\tan \alpha}\right) \exp\left(-i 2 \pi \frac{r s_a}{\sin \alpha}\right) dr, \quad (2.11)$$

avec

$$C(\alpha) = \frac{\exp[i \alpha]}{i \sin \alpha}, \quad (2.12)$$

où $\alpha > 0$.

Comme nous pouvons le constater, si l'on souhaite décrire la propagation au moyen de variables spatiales, la définition de la TF fractionnaire pose problèmes puisque ses variables sont sans dimensions. Ceci constitue la première problématique. Une solution a été proposée par [4 [Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform]]. Cette solution consiste à donner une interprétation optique de la TF fractionnaire dans l'espace de Wigner.

Reste ensuite à trouver les éléments optiques de cette interprétation.

Rappel

La TF fractionnaire d'ordre α d'une fonction fait subir une rotation d'angle α dans le sens horaire à sa distribution de Wigner.

Lohmann a décomposé cette rotation en trois étapes comme l'illustre la figure (4).

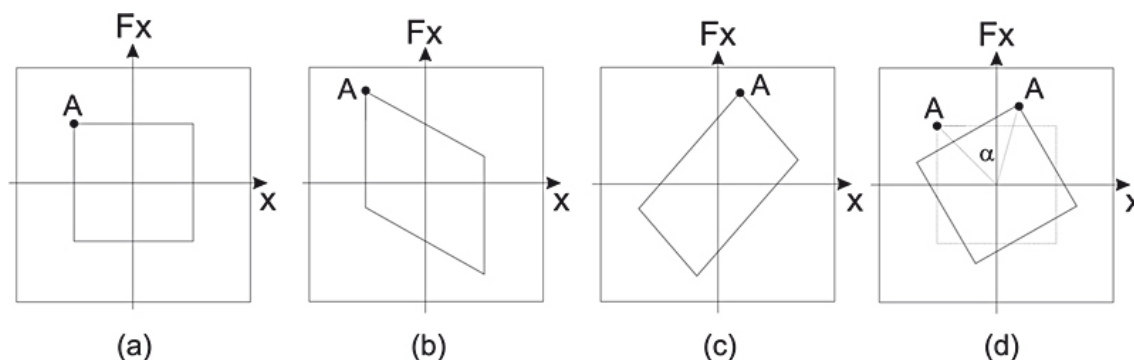


Figure 4 : (a) Contour d'origine, (b) Etirement fréquentiel, (c) Etirement spatial, (d) Etirement fréquentiel. x , variable spatiale, F_x variable fréquentielle

Cette illustration est pour un angle α de $\pi/3$.

Ces trois étapes se résument à un étirement fréquentiel de la distribution, suivi d'un étirement spatial et enfin un dernier étirement fréquentiel. Les étirement fréquentiels sont réalisés optiquement par une lentille et l'étirement spatial par un produit de convolution, autrement dit une propagation. Dans [4 [Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform]], le paramètre σ apparaît sous la forme d'une focale abstraite f_1 dépourvue de sens physique. Cette ambiguïté a été soulevée en remplaçant le paramètre λf_1 par ϵ^2 dans l'interprétation de la TF fractionnaire par la distribution de Wigner.

Cette interprétation de la TF fractionnaire est telle que

$$F_{\alpha}[f(r)](s) = C(\alpha) \exp\left(i \frac{\pi s^2}{\epsilon^2 \tan \alpha}\right) \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(r) \exp\left(i \frac{\pi r^2}{\epsilon^2 \tan \alpha}\right) \exp\left(-i 2 \pi \frac{rs}{\epsilon^2 \sin \alpha}\right) dr \quad (2.13)$$

où les variables $[s]$, $[r]$ et $[\epsilon]$ ont la dimension d'une longueur. Le coefficient de normalisation $C(\alpha)$ vaut quant à lui :

$$C(\alpha) = \frac{\exp[i\alpha]}{i \epsilon^2 \sin \alpha}. \quad (2.14)$$

Pour $\epsilon = 1$ et des variables sans dimensions, la définition mathématique de la transformation de Fourier fractionnaire est retrouvée. Dans notre cas, la définition donnée à ϵ^2 est liée à la façon dont on échantillonne le signal et à l'expression de la TF numérique. Car c'est bien le numérique qui nous sert pour une métrologie par TF fractionnaire. Pour définir la valeur de ϵ , il est nécessaire d'écrire la définition de la TF fractionnaire dans le cas particulier où $\alpha = \pi/2$:

$$F_{\pi/2}[f(r)](s) = C(\pi/2) \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(r) \exp\left[-i 2 \pi \frac{rs}{\epsilon^2}\right] dr. \quad (2.15)$$

Sa version discrétisée vaut :

$$F_{\pi/2}[f(m, n)](k, l) = C(\pi/2) \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f(m, n) \exp\left[-i 2 \pi \left(\frac{mk \delta_{\xi} \delta_x}{\epsilon^2} + \frac{nl \delta_{\eta} \delta_y}{\epsilon^2}\right)\right] \delta_{\xi} \delta_{\eta} \quad (2.16)$$

où δ_{zeta} et δ_x représentent le pas d'échantillonnage de $f(r)$ et de sa transformée suivant les abscisses et δ_{η} et δ_y suivant les ordonnées.

Le nombre d'échantillons suivant l'axe des abscisses est M et N suivant les ordonnées.

Que nous soyons dans le domaine spatial ou le domaine spectral, le nombre d'échantillons est le même.

La relation (2.16) doit s'écrire comme la transformation de Fourier discrète proposée par des logiciels, c'est-à-dire :

$$F_{\pi/2}[f(m, n)](k, l) = C(\pi/2) \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f(m, n) \exp\left[-i 2 \pi \left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N}\right)\right] \delta_{\xi} \delta_{\eta} \quad (2.17)$$

En identifiant les relations (2.17) et (2.16), nous obtenons :

$$\frac{\delta_\xi \delta_{\%x}}{\epsilon^2} = \frac{1}{M} \text{ et } \frac{\delta_\eta \delta_{\%y}}{\epsilon^2} = \frac{1}{N} \quad (2.18)$$

La *TF* numérique ne "voit" que des pixels, sans dimension, au même titre que la *FFT* (Fast Fourier Transform).

Donc quelques soient les domaines de description (spatial ou fréquentiel), c'est le pixel qui échantillonne.

C'est la raison pour laquelle nous posons : $\delta_\zeta = \delta_x$ et $\delta_\eta = \delta_y$.

Attention

Généralement les pixels sont identiques suivant les deux axes du plan de description et pour tous domaines de description donc le pas d'échantillonnage est pris égale à δ . Le nombre de pixels suivant les deux axes est généralement le même : $N = M$. Si ce n'est pas le cas, on tronque les dimensions de l'image pour obtenir une image carrée. Finalement, nous avons :

$$\epsilon^2 = N \delta^2 \quad (2.19)$$

Si l'image ne peut pas être de dimensions carrées, on définit deux ϵ comme $\epsilon = (\epsilon_\zeta, \epsilon_\eta) = (M, N)\delta^2$.

b) Courbures résidus

La transformation de Fourier est un cas particulier de la *TF* fractionnaire, nous pouvons alors écrire que :

$$F_{\pi/2}[f(r)](s) = \frac{1}{\epsilon^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(r) \exp\left(-i 2\pi \frac{rs}{\epsilon^2}\right) dx. \quad (2.20)$$

A partir de cette définition de la *TF*, l'équation (2.4) devient :

$$\hat{U}(s, z) = \hat{U}(s, 0) \exp\left[-i \pi \lambda z \frac{s^2}{\epsilon^4}\right]. \quad (2.21)$$

$U(r, z)$ est la transformée de Fourier inverse de $\hat{U}(s, z)$:

$$U(r, z) = C(-\pi/2) \int \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}(s, 0) \exp\left[-i \pi \lambda z \frac{s^2}{\epsilon^4}\right] \exp\left(-i 2\pi \frac{rs}{\epsilon^2 \sin(-\pi/2)}\right) ds, \quad (2.22)$$

que l'on peut également énoncer comme étant une transformation de Fourier fractionnaire d'ordre α telle que :

$$\hat{U}(s_y, z) = \frac{C(-\pi/2)}{C(\alpha)} \exp\left(-i \frac{\pi s_y^2}{\epsilon^2 \tan \alpha}\right) \mathbf{F}_\alpha[\hat{U}(s, 0)](s_y), \quad (2.23)$$

où

$$\hat{U}(s_y, z) = U\left(-\frac{s_y}{\sin \alpha}, z\right), \quad s_y = -s \sin \alpha, \quad (2.24)$$

et d'ordre fractionnaire :

$$\cot \alpha = \frac{-\lambda_z}{\epsilon^2}. \quad (2.25)$$

Puisque la distribution du champ $\hat{U}(s, 0)$ est la transformée de Fourier fractionnaire d'ordre $\pi/2$ de $U(r, 0)$, alors par composition $\mathcal{F}_\alpha \circ \mathcal{F}_\pi = \mathcal{F}_{\alpha+\pi/2}$

de $U(r, 0)$, nous pouvons définir la distribution d'amplitude du champ à une distance z en fonction de la distribution d'amplitude à la distance $z = 0$ en faisant apparaître une transformation de Fourier fractionnaire d'ordre $\gamma = \alpha + \pi/2$ en facteur avec un terme de phase quadratique telle que :

$$\hat{U}(s_y, z) = \cos \gamma \exp[-i \gamma] \exp\left(i \frac{\pi s_y^2}{\epsilon^2 \tan \gamma}\right) \mathbf{F}_\gamma[U(r, 0)](s_y) \quad (2.26)$$

La relation (2.26), d'après Bonnet et Pellat-Finet [5 [Fresnel diffraction and the fractional-order Fourier transform], 6 [Fractional-order Fourier transform and Fourier optics]], met en évidence le problème du résidu de phase quadratique dépendant de la variable s . Lorsque l'on considère la diffraction dans l'approximation de Fraunhofer, une transformation de Fourier pure est suffisante. Dans cette approximation les termes de phase quadratique n'interviennent pas. Autrement dit, les courbures n'interviennent pas. Seuls sont considérés les plans.

Remarque

Dans le cas de l'approximation de Fresnel, nous avons vu que la transformation de Fourier fractionnaire peut être utilisée mais cette interprétation laisse un terme de phase quadratique. Il ne s'agit donc pas d'une *TF* fractionnaire pure. La notion de plan n'est donc pas adaptée à l'analyse des systèmes d'imagerie en éclairage cohérent.

La théorie métaxiale apparaît comme un prolongement de la théorie de l'optique paraxiale.

Bonnet explique clairement la démarche :

la recherche d'une imagerie cohérente impose que l'équation (2.26) ne contienne pas le terme s qui l'affecte. Ce terme de phase quadratique fait allusion à la notion de transparence de courbure. Cette transparence de courbure devient neutre pour une courbure particulière [3 [The Fractional Fourier Transform]]. **Nous trouvons donc une image cohérente sur un récepteur sphérique.**

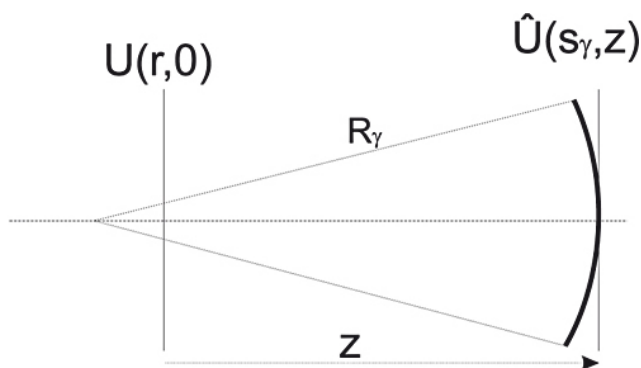


Figure 5 : Image cohérente sur la calotte sphérique de courbure $R \gamma = \epsilon^2 / (\lambda \tan \gamma)$

L'image cohérente de $U(r, 0)$ se trouve donc sur une sphère de rayon de courbure $R\gamma = \epsilon^2 / (\lambda \tan \gamma)$ comme l'illustre la figure (5).

La définition du champ sur la calotte sphérique est définie par :

$$\hat{U}(s_\gamma, z) = \cos \gamma \exp(-i\gamma) F_\gamma[U(r, 0)](s_\gamma) \quad (2.27)$$

avec les changements d'échelle suivants :

$$\hat{U}(s_\gamma, z) = U\left(\frac{s_\gamma}{\cos \gamma}, z\right), \quad s_\gamma = s \cos \gamma \quad (2.28)$$

Cette transformation d'ordre fractionnaire γ implique une modification de la relation (2.25) :

$$\tan = \frac{\lambda z}{\epsilon^2} \quad (2.29)$$

Les propriétés de la TF fractionnaire deviennent intéressantes dans le cas de la description de la propagation.

Si z tend vers 0, l'ordre γ est nul. L'opérateur fractionnaire tend alors vers \mathbf{F}_0 qui est l'opérateur identité.

Si maintenant z tend vers l'infini, γ tend vers $\pi/2$. Il s'agit de l'opérateur TF classique.

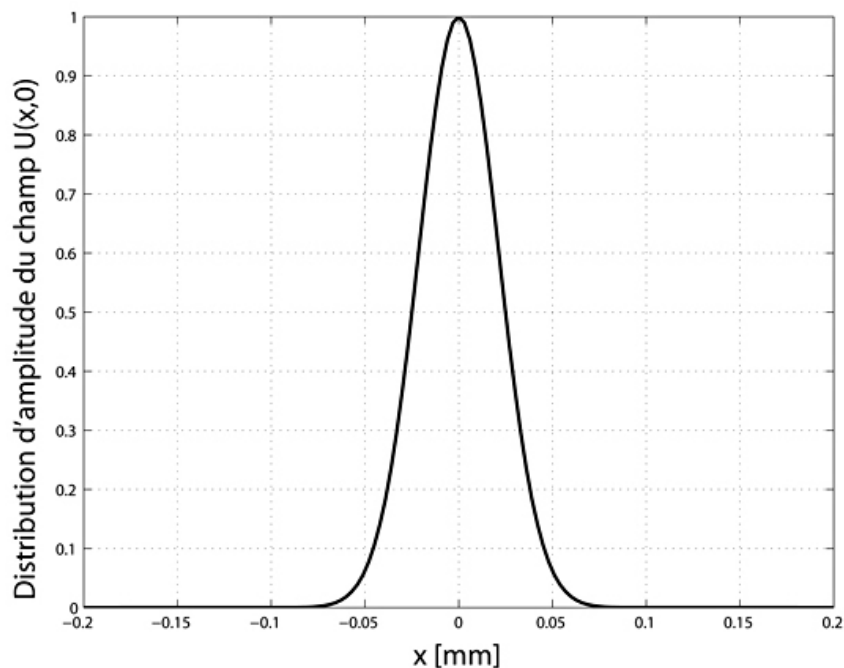


Figure 6 : a) fonction gaussienne à $z=0$ avec $\omega_0=30\mu\text{m}$, $\lambda=633\text{nm}$

Figure 6 : (a) fonction gaussienne à $z = 0$ avec $\omega_0 = 30 \mu\text{m}$, $\lambda = 633 \text{ nm}$

Du point de vue de la diffraction, il s'agit de la diffraction dans l'approximation de Fraunhofer. Nous passons donc continûment du champ initial à son spectre angulaire.

Attention

la notion théorique de récepteur sphérique ne présente pas d'inconvénient particulier dans la plupart de nos méthodes de métrologie. Le récepteur est un capteur quadratique sensible uniquement à l'intensité. Le terme de phase en s_y^2 de l'équation (2.26) n'intervient donc pas.

c) Exemple

Prenons un faisceau gaussien tel que son amplitude est définie par :

$$U(r,0) = \exp\left[-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right], \quad (2.30)$$

avec ω_0 le rayon du faisceau à $1/e$. La figure (6) donne une représentation graphique.

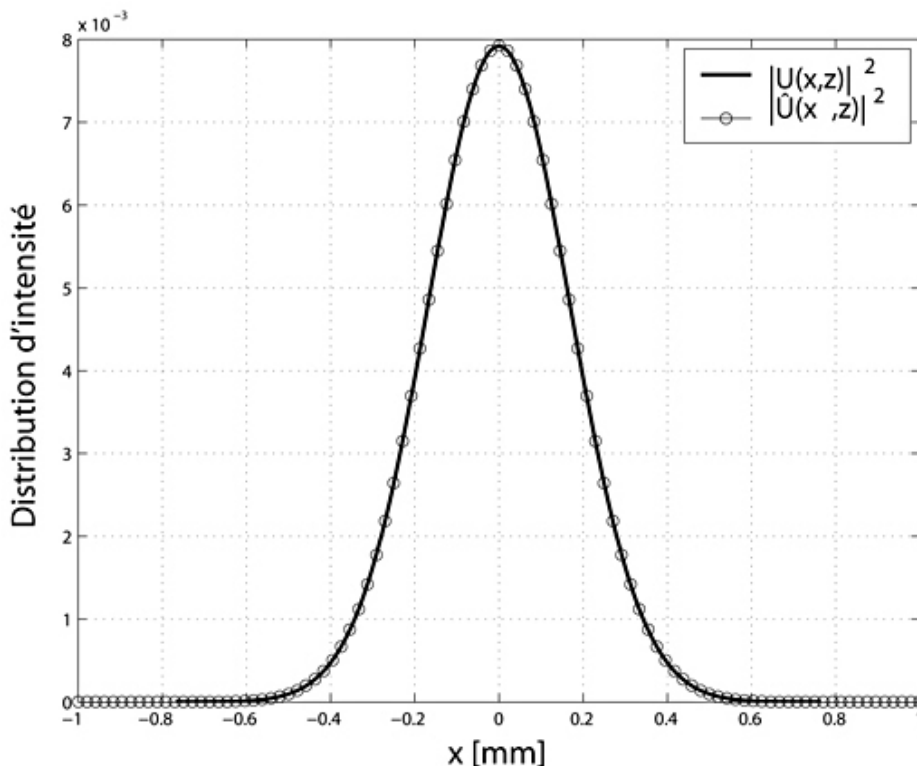


Figure 7 : Distributions d'intensité à $z=50\text{mm}$ avec $\omega_0=30\mu\text{m}$, $\lambda=633\text{nm}$

La distribution d'amplitude du faisceau gaussien à une distance z compte tenu de la relation de Fresnel (2.10) vaut :

$$U(r, z) = \frac{1}{1 + i \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right)} \exp \left[-\frac{r^2}{\omega^2(z)} \right] \exp \left[i \pi \frac{r^2}{\lambda R(z)} \right], \quad (2.31)$$

avec

$$W(z) = \frac{\lambda z}{\pi \omega_0} \left[1 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \text{et} \quad R(z) = z \left[1 + \frac{\left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda z} \right)^2}{1 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda z} \right)^2} \right]^{-1}. \quad (2.32)$$

La comparaison des distributions d'intensité $|U(r, z)|^2$ et $|\hat{U}(s_\gamma, z)|^2$ pour $\omega_0 = 30 \mu\text{m}$, $\lambda = 633 \text{ nm}$ et $z = 50 \text{ mm}$ est illustrée figure (7).

L'ordre fractionnaire γ vaut, quant à lui, $1,462 \text{ rad}$ et la distribution d'amplitude $\hat{U}(s_\gamma, z)$ se trouve sur une sphère de rayon de courbure $R_\gamma = 1,0598 \text{ mm}$.

* *
*

Grâce à la définition de ϵ^2 , nous avons réalisé une synthèse entre les définitions mathématiques, optique de la FRFT et la numérisation des signaux optiques par un système d'acquisition numérique.

3. Analyse d'hologrammes de fibre par TF fractionnaire

L'analyse directe des franges de diffraction peut faire appel à différentes méthodes de restitution numérique, par exemple la transformation de Fresnel inverse.

Cette technique présente l'inconvénient de ne pas retrouver la forme de l'objet lorsque le faisceau de codage est astigmatique : les rayons de courbure, suivant deux axes orthogonaux x et y sont différents et rien ne justifie de choisir des phases quadratiques différentes dans le noyau de Fresnel.

Par contre la transformation de Fourier fractionnaire nous permet de choisir des phases quadratiques distinctes suivant les deux axes.

Les distributions d'intensité du champ diffracté par des objets (fibres, particules,...) enregistrées sur un support quadratique dans le cadre de l'holographie dans l'axe (holographie in-line) feront intervenir des dérivées de fréquence linéaire différentes suivant les axes (x, y) de l'image.

Néanmoins, nous allons considérer ici que le faisceau est plan et ne présente aucune aberration. Ce paragraphe propose une méthode d'analyse des hologrammes de fibre par la transformation de Fourier fractionnaire. La démarche dans le cadre d'une métrologie par TF fractionnaire est d'une part de définir la distribution d'intensité dans le plan du capteur quadratique et, d'autre part, de repérer les fonctions contenant des dérivées de fréquence linéaire pour les analyser au moyen de la TF fractionnaire.

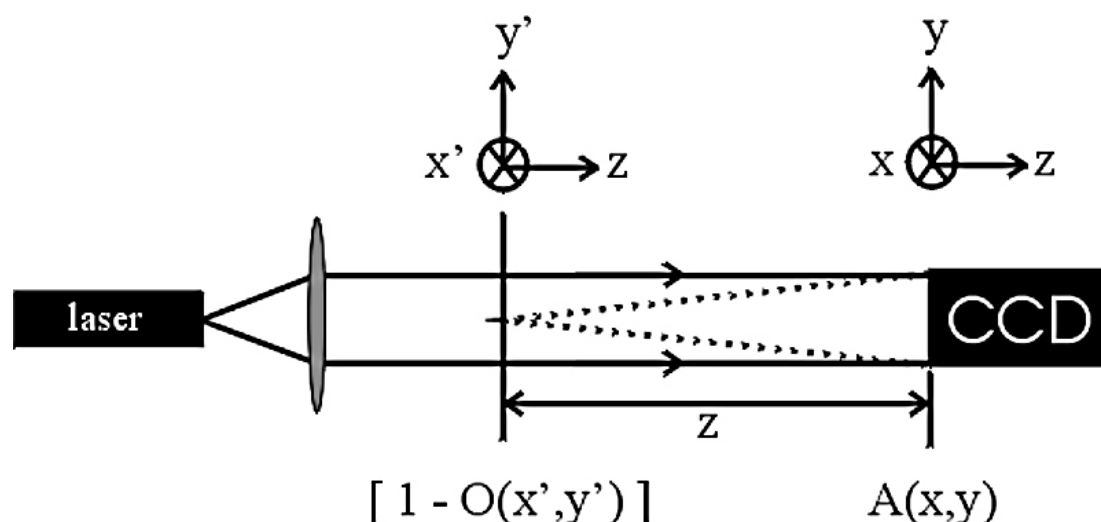


Figure 8 : Dispositif expérimental de l'enregistrement d'un hologramme dans l'axe

3.1. Equations des hologrammes de fibre

a) Calcul du champ diffracté par une fibre

Soit un objet opaque, noté $[1 - O(x', y')]$ localisé à une distance z du capteur CCD, comme le montre la figure 8. En accord avec l'intégrale d'Huygens et sous l'approximation de Fresnel, l'amplitude du champ complexe, notée $A(x, y)$ est donnée par :

$$A(x, y) = \frac{\exp(i \frac{2\pi}{\lambda} z)}{i \lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - O(x', y')] \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]\right) dx' dy' \quad (3.1)$$

Dans le cas particulier où la transmittance de l'objet s'exprime par une fonction unidimensionnelle, l'équation (3.1) s'exprime sous une forme simplifiée :

$$A(x) = \frac{\exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z\right)}{\sqrt{\lambda z}} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - O(x')] \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z} \left[(x-x')^2 - \frac{\pi}{4}\right]\right) dx' \quad (3.2)$$

Pour une fibre opaque de diamètre d et centrée à l'origine, la transmittance d'un tel objet est définie par la relation suivante :

$$O(\xi) = \text{rect}\left[\frac{\xi}{d}\right] = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| < d/2, \\ 1/2 & \text{si } |\xi| = d/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Le champ complexe $A(x)$ s'exprime, à l'aide des intégrales de Fresnel de première et seconde espèce :

$$A(x) = 1 - \frac{\exp(-i \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}} \cdot \{ \mathcal{E}(\mu_1) - \mathcal{E}(\mu_2) + i[\mathcal{S}(\mu_1) - \mathcal{S}(\mu_2)] \}, \quad (3.4)$$

où $\mu_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x + d/2)$ et $\mu_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x - d/2)$. $\mathcal{C}(x)$ et $\mathcal{P}(x)$ sont les intégrales de Fresnel de première et seconde espèce. Leur définition est :

$$\mathcal{E}(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt. \quad (3.5)$$

Dans l'approximation champ lointain, c'est-à-dire lorsque $z > 10d^2/\lambda$, la distribution d'intensité s'exprime par la relation suivante :

$$I(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\lambda z}} \cos \left[\frac{\pi x^2}{\lambda z} - \frac{\pi}{4} \right] F(x) + \frac{1}{\lambda z} F^2(x) \quad (3.6)$$

La figure 9 donne un exemple de distribution d'intensité. L'expression

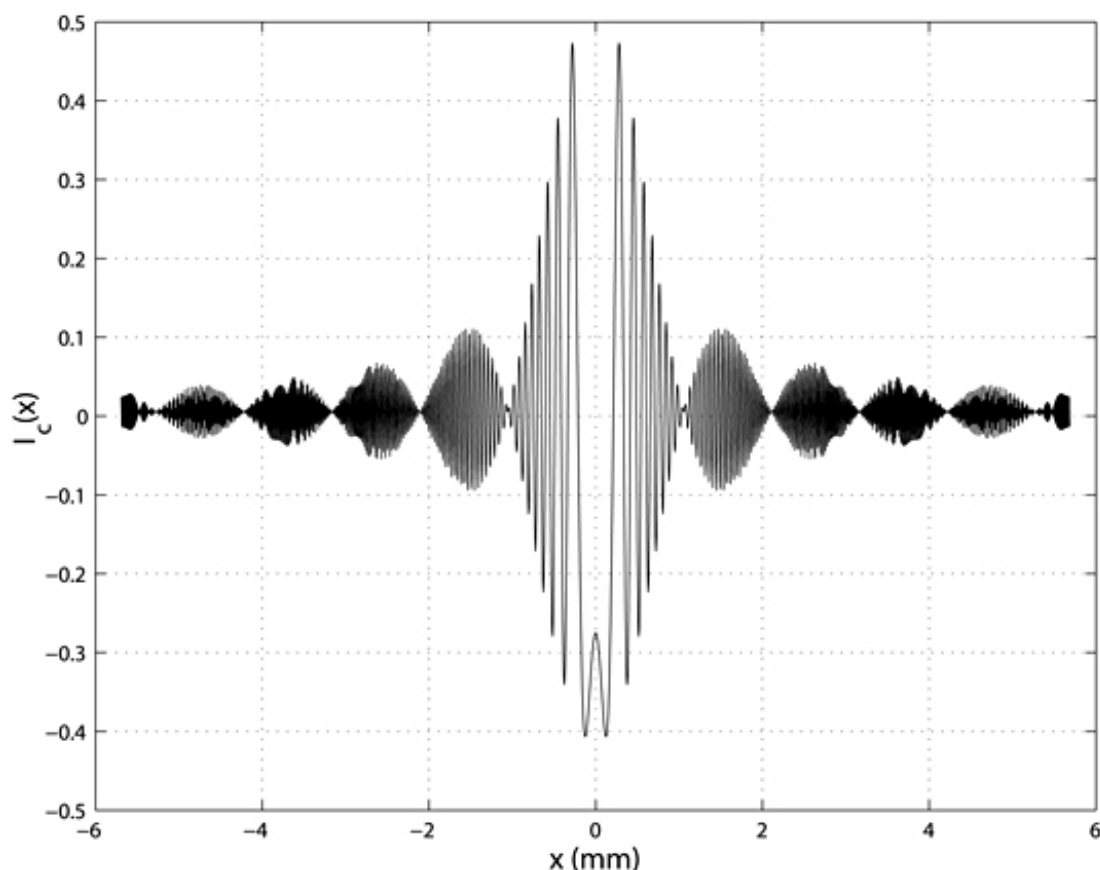


Figure 9 : Représentation de la distribution d'intensité $I(x)$ pour $z = 100\text{mm}$ et $d = 60\mu\text{m}$

$$F(x) = d \operatorname{sinc} \left[\frac{dx}{\lambda z} \right] = \frac{\sin \left(\frac{\pi dx}{\lambda z} \right)}{\frac{\pi dx}{\lambda z}} \quad (3.7)$$

est la transformée de Fourier de $O(x')$. Comme le montre l'équation (3.6), l'intensité $I(x)$ est partiellement décrite par une fonction réelle à dérive de fréquence linéaire

$$\cos \left[\frac{\pi x^2}{\lambda z} - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (3.8)$$

Nous allons montrer qu'il est possible d'analyser ce type de signal par la TF fractionnaire. Dans la mesure où l'approximation champ lointain est moins restrictive que l'approximation champ proche, nous raisonnerons dans un premier temps sur l'équation (3.6). Les résultats resteront valables en champ proche.

Comme nous l'avons fait remarquer dans le cours ou dans le chapitre précédent, la propriété la plus importante de la transformation de Fourier fractionnaire est celle qui la relie à la fonction de distribution de Wigner. Nous allons donc tout d'abord étudier au paragraphe suivant la fonction de distribution de Wigner du second terme de l'équation (3.6).

b) Fonction de distribution de Wigner d'une ouverture rectangulaire

Rappelons que la fonction de distribution de Wigner est définie par la forme intégrale :

$$W_{S,S}(x,v) = W_S(x,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} S\left(x + \frac{\xi}{2}\right) \cdot S^*\left(x - \frac{\xi}{2}\right) \exp(-i2\pi v \xi) d\xi, \quad (3.9)$$

Prenons le cas d'une fonction $S(x)$ définie par

$$S(x) = \cos\left[\frac{\pi x^2}{\lambda z} - \frac{\pi}{4}\right] F(x). \quad (3.10)$$

La fonction $S(x)$ est la somme de deux termes exponentiels :

$$S(x) = \frac{1}{2} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) S_+(x) + \frac{1}{2} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) S_-(x), \quad (3.11)$$

avec

$$S_{\pm} = \exp\left(-i\frac{\pi x^2}{\lambda z}\right) F(x) \quad (3.12)$$

La distribution de Wigner est bilinéaire. Elle fera donc apparaître un terme non-linéaire (on parle d'interférences) dans le cas d'un signal multi-composantes. La distribution de Wigner de la relation (3.10) vaut finalement :

$$W_S(x,v) = \frac{1}{4} [W_{S_+}(x,v) + W_{S_-}(x,v)] + N(x,v). \quad (3.13)$$

Par la méthode des phases stationnaires, le développement du terme non linéaire, noté ici, N , donne le résultat qui suit :

$$N(x,v) = k \sin c\left[\frac{\pi d}{\lambda z}(x + 2\lambda z v)\right] \sin c\left[\frac{\pi d}{\lambda z}(x - 2\lambda z v)\right] \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda z} x^2 - 2\pi \lambda z v^2 + \frac{\pi}{4}\right] \quad (3.14)$$

avec $k = -\sqrt{\frac{\lambda z}{4\pi}}$. Nous voyons clairement que les termes d'interférence contiennent toutes les informations liées au système, c'est-à-dire l'information sur la position axiale z et le diamètre d de la fibre.

Or une étude sur cette partie du signal ne paraît pas triviale pour la description des figures de diffraction.

Remarque

Si un profil énergétique est souhaité, sa contribution est affaiblie par le fait qu'il est à valeurs positives et négatives.

Nous concentrerons donc notre attention sur les deux premiers termes de l'équation (3.13).

En sachant que $F(x)$ est la transformée de Fourier de $O(x')$ et en vertu des relations (2.32), (2.33) et (2.34) du premier cours sur les fondements de la TF fractionnaire et ses propriétés envers la distribution de Wigner, les deux premiers termes de l'équation (3.13) peuvent être écrits comme la somme des distributions de Wigner suivantes :

$$W_{S_+}(x, \nu) + W_{S_-}(x, \nu) = W_O\left(-\nu + \frac{x}{\lambda z}, x\right) + W_O\left(-\nu - \frac{x}{\lambda z}, x\right) \quad (3.15)$$

où

$$W_O(x, \nu) = (d - |x|) \operatorname{sinc}[\nu(d - |x|)] \operatorname{rect}\left[\frac{x}{d}\right] \quad (3.16)$$

$W_O(x, \nu)$ est la fonction de distribution de la fonction rectangle définie par (3.3)

La figure 10 donne un exemple de distribution de Wigner de $S(x)$.

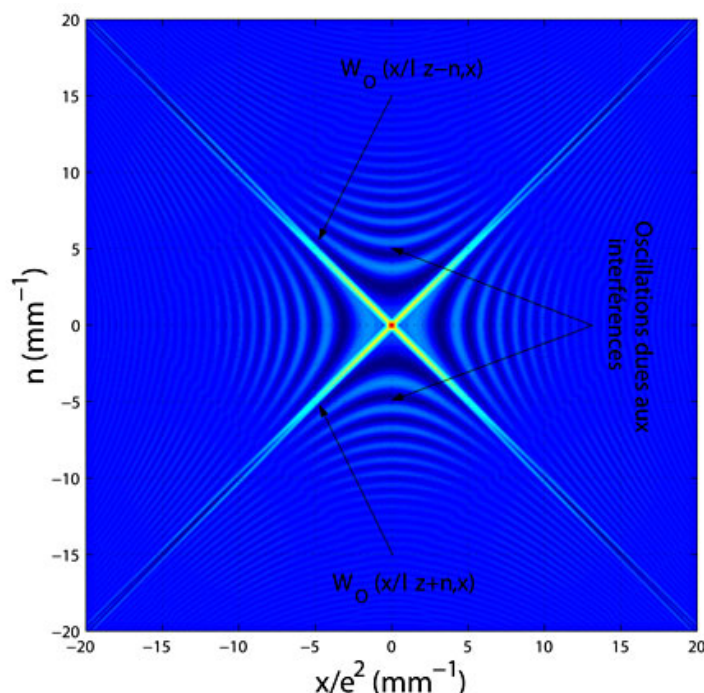


Figure 10 : Représentation de la distribution de Wigner de $S(x)$ pour $z=100\text{mm}$ et $d=60\mu\text{m}$
 $\varepsilon^2 = N \delta^2$, N le nombre d'échantillons et δ le pas d'échantillonnage

Figure 10 : Représentation de la distribution de Wigner de $S(x)$ pour $z = 100 \text{ mm}$ et $d = 60 \mu\text{m}$, $\epsilon^2 = N\delta^2$, N le nombre d'échantillons et δ le pas d'échantillonnage

Pour cet exemple, la distance z choisie vaut 100 mm et le diamètre d vaut $60 \mu\text{m}$.

Ce graphe met en évidence les deux distributions $\mathcal{W}_{S_+}(x, \nu)$ et $\mathcal{W}_{S_-}(x, \nu)$ ainsi que les quatre zones d'interférences externes liées à la bilinéarité de l'opérateur.

Les deux branches de distribution sont concentrées autour des lois de variation $\nu = x/\lambda z$ et $\nu = -x/\lambda z$.

La distribution de Wigner conserve l'ouverture de la fonction sur laquelle elle s'applique.

La largeur de chacune des branches correspond donc au diamètre d de l'ouverture de la fonction rectangle ($\text{rect}(x/d)$).

La distribution d'intensité $I(x)$ (équation (3.6)) a été tracée figure 9. Dans ce cas, la constante a été soustraite.

Cette opération permet de mettre clairement en évidence la distribution de Wigner du signal utile.

En effet, dans l'espace de Wigner, une constante se traduit par une impulsion de Dirac qui empêche toute description du signal.

A la représentation figure 9 est associée sa représentation dans l'espace de Wigner que l'on note \mathcal{W}_{I_c} (figure 11).

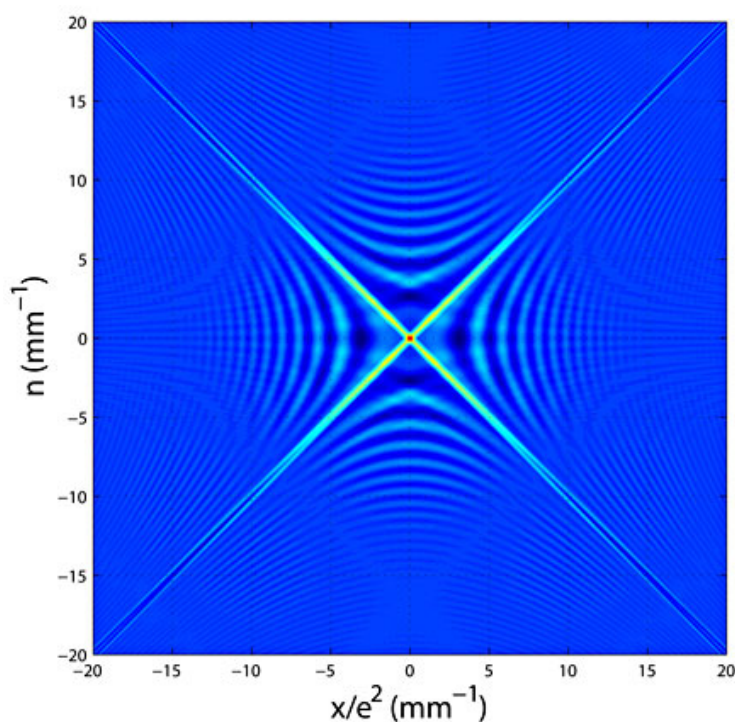


Figure 11 : Représentation de la distribution de Wigner de $I(x)$, notée ωI_c pour $z=100\text{mm}$ et $d=60\mu\text{m}$

Figure 11 : Représentation de la distribution de Wigner de $I(x)$, notée \mathcal{W}_{I_c} pour $z = 100 \text{ mm}$ et $d = 60 \mu\text{m}$

Nous pouvons constater les effets du terme d'auto-corrélation de la fonction $\text{rect}(x'/d)$ sur les termes d'interférence.

Compte tenu de la relation qui lie la fonction de distribution de Wigner et la transformation de Fourier fractionnaire, nous allons mettre à contribution cette transformation pour restituer les hologrammes de fibre.

3.2. Restitution des hologrammes de fibre par TF fractionnaire

Le but, ici, est de mettre en évidence que la transformation de Fourier fractionnaire permet de restituer les images holographiques lorsque l'indice fractionnaire optimal est sélectionné. Nous appliquerons encore une fois le raisonnement sur le terme noté $\mathbf{S}(x)$. Calculons sa transformée de Fourier fractionnaire :

$$F_{\alpha}[\mathbf{S}(x)](x_a) = C(\alpha) \exp\left(i \frac{\pi x_a^2}{\epsilon^2 \tan \alpha}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left[\frac{\pi x^2}{\lambda z} - \frac{\pi}{4}\right] F(x) \exp\left(i \frac{\pi x^2}{\epsilon^2 \tan \alpha}\right) \exp\left(-i 2\pi \frac{x_a x}{\epsilon^2 \sin \alpha}\right) dx, \quad (3.17)$$

En écrivant l'équation (3.17) comme la somme de transformations de Fourier fractionnaires, nous obtenons :

$$F_{\alpha}[\mathbf{S}(x)](x_a) = \mathbf{S}_{a+}(x_a) + \mathbf{S}_{a-}(x_a), \quad (3.18)$$

Les calculs de \mathbf{S}_{a+} et de \mathbf{S}_{a-} nous donnent les résultats suivants :

$$\mathbf{S}_{a+}(x_a) = \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{\lambda z}} \exp\left(-i \frac{\pi x_a^2}{\lambda z}\right) F_{\theta+}[F(x)](rx_a), \quad (3.19)$$

et

$$\mathbf{S}_{a-}(x_a) = \frac{\exp(+i\pi/4)}{\sqrt{\lambda z}} \exp\left(i \frac{\pi x_a^2}{\lambda z}\right) F_{\theta-}[F(x)](rx_a), \quad (3.20)$$

où

$$\tan \theta_{\pm} = \frac{\tan \alpha}{1 \pm \frac{\epsilon^2}{\lambda z} \tan \alpha} \quad \text{et} \quad r = \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}. \quad (3.21)$$

L'écriture des intensités de \mathbf{S}_{a+} et de \mathbf{S}_{a-} est donc :

$$|\mathbf{S}_{a+}(x_a)|^2 = \frac{1}{\lambda z} |F_{\theta+}[F(x)](rx_a)|^2, \quad (3.22)$$

et

$$|\mathbf{S}_{a-}(x_a)|^2 = \frac{1}{\lambda z} |F_{\theta-}[F(x)](rx_a)|^2. \quad (3.23)$$

Ces expressions réalisent la projection de Radon de $\mathcal{W}_{s,\alpha+}$ et de $\mathcal{W}_{s,\alpha-}$ suivant un axe x_a faisant un angle $\frac{\pi}{2}$ avec l'axe des x .

La ré-écriture de $F_\alpha[\mathbf{S}(x)](x_a)$ comme une fonction de deux FRFT d'ordres θ_+ et θ_- facilite son interprétation. En effet si :

$$\alpha = \alpha_{opt} = \arctan(\lambda z / \epsilon^2) \geq 0, \quad (3.24)$$

alors l'équation (3.21) montre que θ_- tend vers $\pi/2$ et par conséquent F_{θ_-} devient une transformation de Fourier classique.

En omettant la constante $1/\lambda z, |\mathbf{S}_{\alpha_{opt}}(x_{\alpha_{opt}})|^2$ n'est autre que la fonction objet $O(x_a)$.

Il est important de noter que la relation (3.24) représente une re-focalisation numérique sur l'image de la fibre compte tenu de la relation (2.29).

Nous sommes, en fait, dans le cas d'une annulation du terme de phase du à la propagation sur une distance z . Ainsi l'enveloppe est extraite et c'est sur cette enveloppe qu'une *TF* classique est réalisée.

Attention

L'annulation du terme de phase au moyen d'une *TF* fractionnaire d'ordre optimal correspond à une rotation optimale dans la représentation de Wigner où une des deux branches devient parallèle à l'axe des fréquences spatiales ν_a . Cette relation est bien connue pour transformer une dérive de fréquence en une impulsion de Dirac.

a) Simulations

En pratique, le niveau d'intensité du fond d'une figure de diffraction ne présente pas d'intérêt. Du point de vue physique, il correspond à une onde de référence unitaire. Le terme constant de $I(x) = A(x)\bar{A}(x)$ sera donc soustrait pour obtenir une moyenne proche de zéro.

I_c dénote la fonction corrigée. $I_{ca}(x_a)$ est sa représentation dans le domaine fractionnaire α . Pour exemple, nous allons reprendre la courbe illustrée figure 9 obtenue rappelons-le pour $d = 60 \mu m$, $z = 100 mm$ et pour la longueur d'onde $\lambda = 632,8 nm$. Sa fonction de distribution de Wigner est représentée figure 11. Appliquons la transformation de Fourier fractionnaire sur $I(x)$.

Nous obtenons $|I_{ca}(x_a)|^2$ dont la figure 12 illustre la restitution de la fibre.

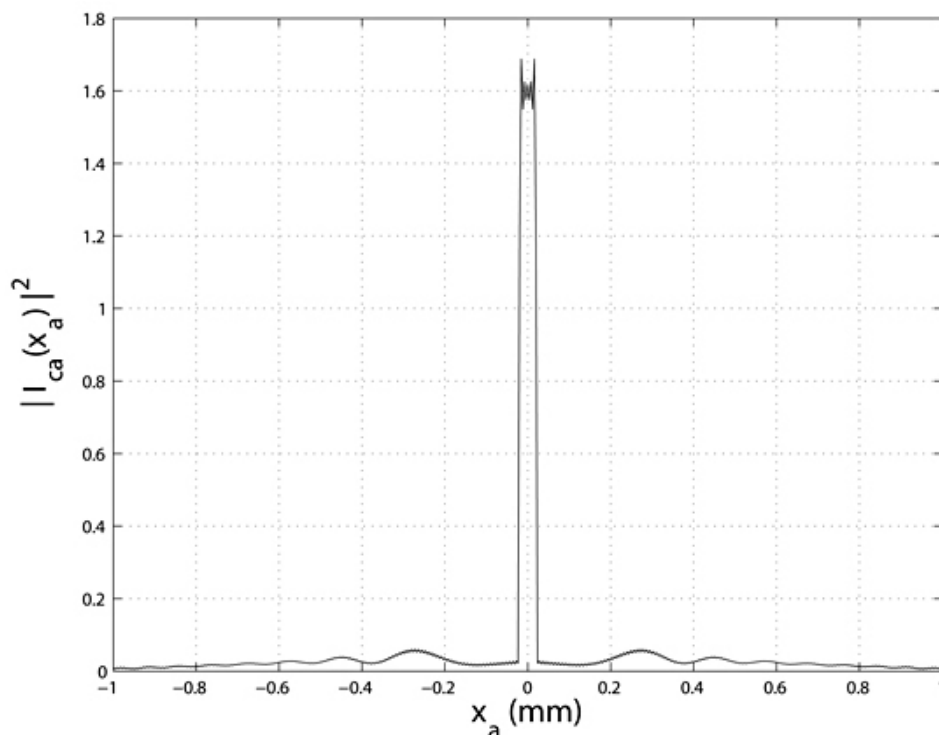


Figure 12 : Restitution par FRFT de $I_c(x)$ pour un indice fractionnaire optimal de 0,5

Figure 12 : Restitution par FRFT de $I_c(x)$ pour un indice fractionnaire optimal de 0,5

Cette courbe est très proche de la fonction rectangle.

Les oscillations sont liées aux termes croisés de la relation (3.13) et à la projection du terme S_{a+} sur l'axe x_a dans l'espace de Wigner.

La distribution de Wigner de cette transformation, figure 13, met bien en évidence une rotation de $\pi/4$ de W_{I_c} . Cette rotation est la rotation optimale déterminée grâce à la relation (3.24). Nous avons, par cet opération, rendu parallèle la distribution liée à S_{a-} à l'axe des fréquences spatiales. En calculant son module au carré, la densité d'énergie est optimisée par projection. Si nous avons réalisé une FRFT d'ordre opposé $a = -0,5$, nous aurions rendu la distribution de Wigner liée à S_{a-} parallèle à l'axe des fréquences spatiales comme le montre la figure 13. Dans ce cas, nous aurions refocalisé sur l'image réelle.

* *
*

Nous avons montré que la transformation de Fourier fractionnaire était bien adaptée pour l'analyse de figures de diffraction.

La distribution d'intensité d'un hologramme enregistré dans l'axe est partiellement décrite par deux fonctions conjuguées à dérive de fréquence linéaire.

Nous avons établi une relation permettant de lier l'indice fractionnaire à la position de l'objet lors de l'enregistrement.

A ce titre, nous constatons que si la dérive de fréquence est annulée, simultanément nous réalisons une refocalisation sur l'objet.

Enfin, grâce à la définition de ϵ^2 , nous avons réalisé une synthèse entre les définitions mathématiques, optique de la FRFT et la numérisation des signaux optiques par un système d'acquisition numérique.

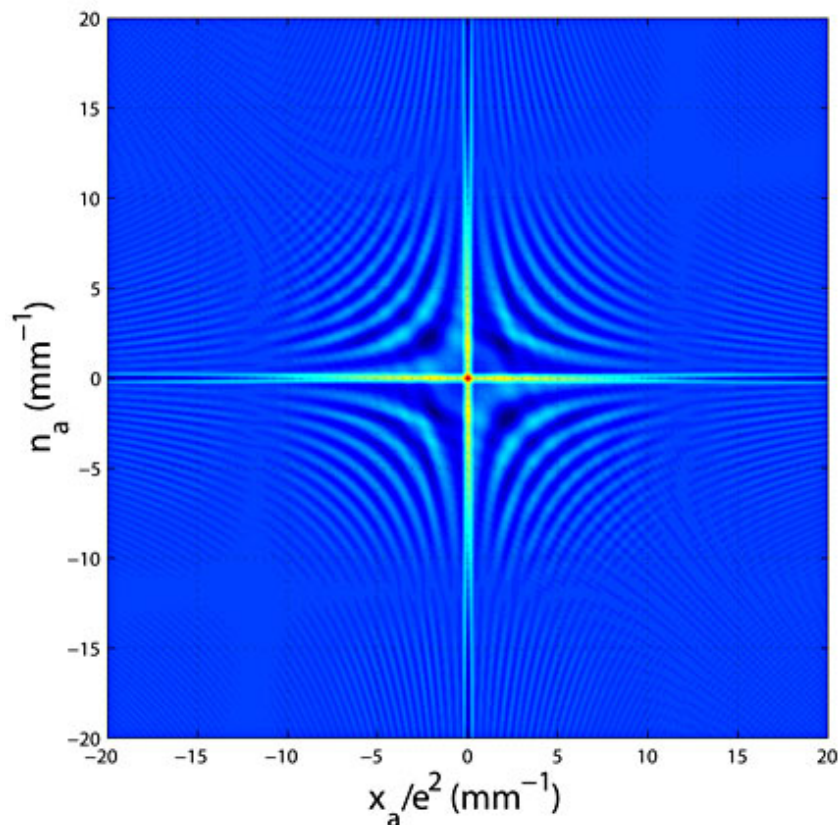


Figure 13 : Représentation de la distribution de Wigner de la FRFT d'ordre $\alpha = \pi/4$ de $I_{ca}(x_a)$

Remerciements : Je tiens à remercier mes anciens étudiants de thèse pour avoir participé à l'élaboration de ce cours. Je remercie également mes collègues Denis Lebrun et Marc Brunel pour l'intérêt qu'ils portent à un tel document dans le cadre de la formation des étudiants de master DIODE deuxième année.

Bibliographie

[Fractional-order Fourier transform and Fourier optics] PELLAT-FINET P., BONNET G., *Fractional-order Fourier transform and Fourier optics*, Opt. Comm., 111 :141-154, 1994.

[Fresnel diffraction and the fractional-order Fourier transform] PELLAT-FINET P., *Fresnel diffraction and the fractional-order Fourier transform*, Appl. Opt., 19(18) :1388-1390, 1994.

[Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform] LOHMANN A. W., *Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform*, J. Opt. Soc. Am. A, 10(10) :2181-2186, 1993.

[Introduction à l'optique métaxiale. Première partie: diffraction métaxiale dans un espace homogène:] BONNET G., Introduction à l'optique métaxiale. Première partie: diffraction métaxiale dans un espace homogène: trilogie structurale, dioptré sphérique, -, -, Ann. Télécom., 33(5-6) :143-165, 1978.

[Temps-Fréquence] P. FLANDRIN, *Temps-Fréquence*, Hermès, Paris, 2eme edition, 1998.

[The Fractional Fourier Transform] H. OZAKTAS, Z. ZALEVSKY AND M. KUTAY, *The Fractional Fourier Transform*, Wiley Press, -, 2001.

Crédit des ressources

Figure 1 : Représentation de $u(x) = \exp(i2\pi \chi x^2)$. ainsi que sa Transformation de Fourier p. 4

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 2 : Représentation de $g(x)=\exp(i2\pi \chi x^2)$ ainsi que sa transformation de Fourier fractionnaire d'ordre optimal p. 5

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 3 : Propagation d'une onde entre deux plans séparés d'une distance ζ p. 6

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 4 : (a) Contour d'origine, (b) Etirement fréquentiel, (c) Etirement spatial, (d) Etirement fréquentiel. x , variable spatial, F_x variable fréquentiel p. 8

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 5 : Image cohérente sur la calotte sphérique de courbure R $\gamma = \varepsilon^2 / (\lambda \tan \gamma)$ p. 12

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 6 : a) fonction gaussienne à $z=0$ avec $\omega_0=30\mu\text{m}$, $\lambda=633\text{nm}$ p. 13

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 7 : Distributions d'intensité à $z=50\text{mm}$ avec $\omega_0=30\mu\text{m}$, $\lambda=633\text{nm}$ p. 14

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 8 : Dispositif expérimental de l'enregistrement d'un hologramme dans l'axe p. 15

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 9 : Représentation de la distribution d'intensité $I(x)$ pour $z = 100\text{mm}$ et $d = 60\mu\text{m}$ p. 17

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 10 : Représentation de la distribution de Wigner de $S(x)$ pour $z=100\text{mm}$ et $d=60\mu\text{m}$ $\varepsilon^2=N \delta^2$, N le nombre d'échantillons et δ le pas d'échantillonnage p. 19

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 11 : Représentation de la distribution de Wigner de $I(x)$, notée ω_{Ic} pour $z=100\text{mm}$ et $d=60\mu\text{m}$ p. 20

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 12 : Restitution par FRFT de $I_c(x)$ pour un indice fractionnaire optimal de 0, 5 p. 23

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>

Figure 13 : Représentation de la distribution de Wigner de la FRFT d'ordre $\alpha=\pi/4$ de Ica (xa) p. 24

<http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/2.0/fr/>